MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

21. BAND 3./4. HEFT

(AUSGEGEBEN AM 17. NOVEMBER 1924)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1924

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, deren vier zu einem Bande vereinigt werden sollen.

Jährlich sollen drei Bände herausgegeben werden. Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

K. Knopp, Königsberg, Bergplatz 6,
L. Lichtenstein, Leipzig, Talstraße 35, Mathematisches Institut,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

---

21. Band. **Inhalt:** 3./4. Heft.

Seite

Fock, V., Über eine Klasse von Integralgleichungen 161
Study, E., Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen. Teil IV. 174
Kirmse, J., Zur Darstellung total positiver Zahlen als Summen von vier Quadraten 195
Szegö, G., Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn M. Fekete: Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten 203
Blaschke, W., Eine Kennzeichnung der Kreise auf der Kugel 209
Friedmann, A., und J. A. Schouten, Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragungen 211
Myrberg, P. J., Über die automorphen Funktionen bei einer Klasse Jonquièresscher Gruppen zweier Veränderlichen 224
Thomsen, G., Über eine gemeinsame Behandlungsweise verschiedener Differentialgeometrien 254
Sternberg, W., Über die lineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei unabhängigen Veränderlichen 286
Brouwer, L. E. J., Zum natürlichen Dimensionsbegriff 312
Perron, O., Beweis eines Satzes von Bézout 315

Über eine Klasse von Integralgleichungen.

Von

V. Fock in Petrograd.

In dieser Arbeit beabsichtige ich, die Lösung der Volterraschen Integralgleichung *zweiter* Art von der speziellen Form

$$G(x) = F(x) + \int_0^x G(\xi) K(x-\xi)\, d\xi$$

in Form eines bestimmten Integrals zu finden. Der Kern K dieser Gleichung ist eine Funktion der Differenz beider Argumente x und ξ. $F(x)$ ist eine gegebene, $G(x)$ die zu findende Funktion.

Zu diesem Zwecke beweise ich zunächst den folgenden Satz:

Es sei eine Funktion $F(x)$ gegeben, welche im Intervall $(0, \infty)$ stetig und absolut integrierbar ist und den Dirichletschen Bedingungen genügt. Die Funktion $f(z)$ sei ferner durch

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-xz} F(x)\, dx$$

definiert, wobei angenommen wird, daß das Integral konvergiert, falls der reelle Teil $\Re z$ von z positiv und genügend groß, etwa $> \alpha$ ist. Dann ist für $a > \alpha$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{xz} f(z)\, dz.$$

Den Beweis führe ich nach Poincaré[1]).

Nach dem Fourierschen Integralsatze hat die Gleichung

$$(*) \qquad \psi(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ibx} \varphi(x)\, dx$$

[1]) H. Poincaré, Sur la théorie des quanta, Journal de Physique (5) 2 (1912), p. 23.

die Relation

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ibx}\psi(b)\,db$$

zur Folge. Es sei

$$\varphi(x) = e^{-ax}F(x) \quad \text{für} \quad x \geqq 0,$$
$$\varphi(x) = 0 \quad \text{für} \quad x < 0,$$

wo a eine positive reelle Zahl bedeutet, die genügend groß ist, damit das Integral (*) konvergiere. Dann können wir, unseren die Funktion $F(x)$ betreffenden Annahmen gemäß, die Fouriersche Formel anwenden.

Wir haben

$$\psi(b) = \int_0^{\infty} e^{-ax}F(x)e^{-ibx}\,dx$$

und

$$e^{-ax}F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ibx}\psi(b)\,db \qquad (x > 0)$$

oder auch

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(a+ib)x}\psi(b)\,db, \qquad (x > 0)$$

da a konstant ist. Setzen wir noch $a + ib = z$, $\psi(b) = f(z)$, so ist der Beweis erbracht.

Wir wenden uns nun der Integralgleichung

$$G(x) = F(x) + \int_0^x G(\xi)K(x-\xi)\,d\xi$$

zu.

Multiplizieren wir beide Seiten mit $e^{-xz}dx$ und integrieren zwischen den Grenzen 0 und ∞, so ergibt sich

$$\int_0^{\infty} e^{-xz}G(x)\,dx = \int_0^{\infty} e^{-xz}F(x)\,dx + \int_0^{\infty} e^{-xz}\,dx\int_0^x G(\xi)K(x-\xi)\,d\xi.$$

Im Doppelintegral kehren wir die Integrationsfolge um (nach einem Dirichletschen Satze) und erhalten

$$\int_0^{\infty} G(\xi)\,d\xi\int_{\xi}^{\infty} e^{-xz}K(x-\xi)\,dx.$$

Wir führen statt x eine neue Integrationsvariable ζ ein

$$\zeta = x - \xi; \qquad x = \xi + \zeta.$$

Dann ergibt sich

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi z}G(\xi)\,d\xi\int_0^{\infty} e^{-\zeta z}K(\zeta)\,d\zeta.$$

Ferner bezeichnen wir

$$\int_0^\infty e^{-xz} F(x)\,dx = f(z), \qquad \int_0^\infty e^{-xz} K(x)\,dx = k(z).$$

Dann ist

$$\int_0^\infty e^{-xz} G(x)\,dx = f(z) + k(z)\int_0^\infty e^{-xz} G(x)\,dx,$$

woraus

$$\int_0^\infty e^{-xz} G(x)\,dx = \frac{f(z)}{1-k(z)}$$

und nach dem bewiesenen Satze

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{xz}\frac{f(z)}{1-k(z)}\,dz$$

folgt, wo a eine genügend große positive Zahl ist. —

Wir müssen nun umgekehrt zeigen, daß die erhaltene Funktion $G(x)$ unserer Integralgleichung wirklich genügt.

Zu diesem Zwecke beweisen wir zunächst die folgenden drei Hilfssätze:

Hilfssatz 1. *Es sei eine Funktion $K(x)$ gegeben, welche mit ihrer Derivierten $K'(x)$ im Intervall $(0, \infty)$ beschränkt und absolut integrierbar ist. Dann ist für alle x und für genügend große $|z|$ mit $\Re z > \beta > 0$*

$$\left|\int_0^\infty e^{-tz} K(x+t)\,dt\right| < \frac{M}{|z|} \qquad (x > 0)$$

und speziell für $x = 0$

$$|k(z)| < \frac{M}{|z|}.$$

In der Tat ist

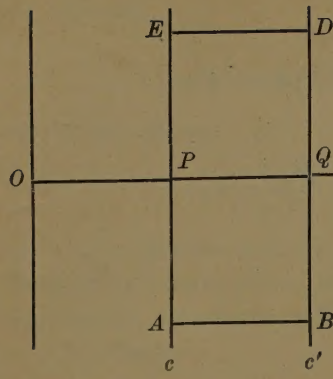
$$\left|\int_0^\infty e^{-zt} K(x+t)\,dt\right| = \frac{1}{|z|}\left|K(x) + \int_0^\infty e^{-zt} K'(x+t)\,dt\right| < \frac{M}{|z|},$$

da das letzte Integral unseren Bedingungen gemäß für jedes der obigen z gleichmäßig beschränkt und $K(x)$ endlich ist.

Hilfsatz 2. *Das Integral*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{xz}\varphi(z)\,dz,$$

worin $\varphi(z)$ für genügend große $|z|$ und $\Re z > \beta > 0$ von der Ordnung $\frac{1}{|z|^2}$ ist, konvergiert und ist unabhängig von der speziellen Wahl der positiven Konstante a.



Wir ziehen zwei Gerade c und c', in Abständen a und a' von der imaginären Achse, und verbinden sie durch zwei der reellen Achse parallele Strecken AB und ED. Wir bezeichnen noch $AP = BQ = b$ und $EP = DQ = b'$. Im Innern des Rechtecks $ABDE$ verhält sich die Funktion

$$e^{xz}\varphi(z)$$

analytisch, folglich ist

$$\int_{ABDEA} e^{xz}\varphi(z)\,dz = 0$$

und

$$\int_{AE} = \int_{BD} + \int_{AB} + \int_{DE}.$$

Nun ist

$$|\varphi(z)| < \frac{M}{|z|^2},$$

Läßt man also in $\int_{AE}$ und $\int_{BD}$ b und b' alle Grenzen wachsen, so konvergieren beide Integrale absolut. Ferner ist

$$\left|\int_{AB} e^{xz}\varphi(z)\,dz\right| = \left|\int_{a-bi}^{a'-bi} e^{xz}\varphi(z)\,dz\right| < \frac{(a'-a)e^{a'x}M}{a^2+b^2}.$$

Die letzte Größe strebt aber mit unendlich wachsendem b dem Werte Null zu. Ebenso ist in der Grenze $\int_{DE} e^{xz}\varphi(z)\,dz = 0$. Folglich ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c e^{xz}\varphi(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'} e^{xz}\varphi(z)\,dz,$$

w. z. b. w.

Hilfssatz 3. *Das Doppelintegral*

$$(**) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_c dz \int_0^t e^{(x-\xi)z} K(\xi)\,\frac{f(z)}{1-k(z)}\,d\xi$$

konvergiert gleichmäßig für alle Werte von t.

Denn der absolute Betrag des Integrals

$$\int_0^t e^{-\xi z} K(\xi)\,d\xi = \frac{1}{z}\{e^{-\xi z}K(\xi)|_t^0 + \int_0^t e^{-\xi z}K'(\xi)\,d\xi\}$$

ist für alle Werte von t kleiner als $\frac{N}{|z|}$. Ferner ist $\left|\frac{f(z)}{1-k(z)}\right| < \frac{N'}{|z|}$, so daß der Integrand im Kurvenintegral $(**)$ von der Ordnung $\frac{1}{|z|^2}$ ist. Es konvergiert also das Integral $(**)$ für alle t gleichmäßig.

Wir wenden uns nun dem Beweise zu, daß unsere Funktion $G(x)$ der Integralgleichung wirklich genügt. Wir schreiben die Gleichung in der Form

$$G(x) - F(x) = \int_0^x G(x-\xi) K(\xi) d\xi,$$

setzen den für $G(x-\xi)$ erhaltenen Ausdruck ein und berechnen das Doppelintegral

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_0^x d\xi \int_c e^{(x-\xi)z} K(\xi) \frac{f(z)}{1-k(z)} dz.$$

Infolge der gleichmäßigen Konvergenz des Integrals (**) des Hilfssatzes 3 können wir hier nach dem von de la Vallée Poussin bewiesenen Satze[2]) die Integrationsfolge umkehren. Wir haben

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{1-k(z)} dz \int_0^x e^{(x-\xi)z} K(\xi) d\xi.$$

Nun ist aber

$$\int_0^x e^{(x-\xi)z} K(\xi) d\xi = \int_0^\infty e^{(x-\xi)z} K(\xi) d\xi - \int_x^\infty e^{(x-\xi)z} K(\xi) d\xi$$

$$= e^{xz} k(z) - \int_0^\infty e^{-tz} K(x+t) dt.$$

Folglich ist

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{xz} \frac{k(z) f(z)}{1-k(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z) \int_0^\infty e^{-tz} K(x+t) dt}{1-k(z)} dz = J_1 - J_2.$$

Dabei ist

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{xz} \frac{f(z)\{1-[1-k(z)]\}}{1-k(z)} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{xz} \frac{f(z)}{1-k(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{xz} f(z) dz = G(x) - F(x),$$

d. h. J_1 ist gleich der linken Seite der Gleichung.

Wir wollen nun zeigen, daß das zweite Integral J_2 gleich Null ist. Auf Grund der im ersten Hilfssatze gegebenen Abschätzung können wir schreiben

$$\left| \frac{f(z) \int_0^\infty e^{-tz} K(x+t) dt}{1-k(z)} \right| < \frac{L}{|z|^2}.$$

[2]) Journal de Liouville (4) 8 (1892), S. 462, § 71.

Somit ist

$$|J_2| < \frac{L}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{db}{a^2+b^2} = \frac{L}{2a}.$$

Nach dem zweiten Hilfssatz ist aber J_2 sowie J_1 [3]) unabhängig von a. Wir können also a beliebig groß annehmen, so daß J_2 beliebig klein wird. Da aber J_2 von a überhaupt nicht abhängt, so ist $J_2 = 0$.

Damit haben wir den folgenden Hauptsatz I bewiesen:

Es sei die Integralgleichung

$$G(x) = F(x) + \int_0^x G(\xi)K(x-\xi)\,d\xi$$

gegeben. Wenn die beiden Funktionen $F(x)$ und $K(x)$ mit ihren Derivierten $F'(x)$ und $K'(x)$ im Intervall $(0, \infty)$ beschränkt und absolut integrierbar sind, so ist die Lösung dieser Gleichung gegeben durch

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{xz}\frac{f(z)}{1-k(z)}\,dz,$$

wo a eine genügend große positive Zahl ist, und die Funktionen $f(z)$ und $k(z)$ durch

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-xz}F(x)\,dx,$$

$$k(z) = \int_0^\infty e^{-xz}K(x)\,dx$$

definiert sind.

Es ist leicht zu zeigen, daß dieser Satz auch unter weniger einschränkenden Bedingungen bestehen bleibt. Es sei nämlich $K(x)$ (und ebenso $F(x)$) in der Form

$$K(x) = x^{\varrho-1}e^{\gamma x}\bar{K}(x), \qquad \gamma \geqq 0, \qquad 0 < \varrho \leqq 1$$

darstellbar, wo $\bar{K}(x)$ allen Bedingungen des Theorems genügt.

Dann gelten folgende Abschätzungen

$$|k(z)| < \frac{\text{konst.}}{|z-\gamma|^\varrho} \qquad (\Re z > \gamma),$$

$$\left|\int_0^\infty e^{-zt}K(x+t)\,dt\right| < \frac{\text{konst.}}{|z-\gamma|} \qquad (x > 0),$$

und die Zahl a hat man größer als γ zu nehmen. Im übrigen erleidet der Beweis nur wenige Änderungen, und der Satz bleibt bestehen.

[3]) Der Integrand in J_1 ist ebenfalls von der Ordnung $\frac{1}{|z|^2}$.

Dieselbe Methode läßt sich auch auf Volterrasche Gleichungen erster Art anwenden, d. h. auf solche von der Form

$$F(x) = \int_0^x G(\xi) K(x-\xi)\, d\xi.$$

Man kann nämlich für dieselben ohne Schwierigkeit den folgenden Hauptsatz II beweisen:

Wenn eine positive Zahl σ existiert von der Beschaffenheit, daß

$$z^\sigma \frac{f(z)}{k(z)}$$

(wo $f(z)$ und $k(z)$ die frühere Bedeutung haben) *mit unendlich wachsendem* $|z|$ *und* $\Re z > 0$ *verschwindet, so hat die Gleichung*

$$F(x) = \int_0^x G(\xi) K(x-\xi)\, d\xi$$

eine Lösung

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{xz} \frac{f(z)}{k(z)} dz.$$ [4])

Ferner sieht man leicht ein: Ist $H(x)$ die Lösung der Gleichung

$$\int_0^x H(\xi) K(x-\xi)\, d\xi = x,$$

so ist, unter einigen die Funktion $F(x)$ betreffenden Einschränkungen, die Lösung der Gleichung

$$\int_0^x G(\xi) K(x-\xi)\, d\xi = F(x)$$

durch

$$G(x) = \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x F(\xi) H(x-\xi)\, d\xi$$

gegeben [5]).

---

[4]) Selbstverständlich wird hier vorausgesetzt, daß dieses Integral, bzw. sein sein Hauptwert existiert und daß die Umkehrung der Integrationsfolge im entsprechenden Doppelintegral erlaubt ist.

[5]) Denn man differentiiere die leicht zu beweisende Gleichung

$$\int_0^x K(t)\, dt \int_0^{x-t} F(x-t-\xi)\, H(\xi)\, d\xi = \int_0^x (x-\xi)\, F(\xi)\, d\xi$$

zweimal nach x und beachte, daß $F(0) = 0$ ist.

Ich betrachte nun einige Beispiele:

1. $$\mathfrak{K}(x) = K(x) + \int_0^x \mathfrak{K}(\xi) K(x-\xi)\, d\xi,$$

$$K(x) = \left(a_0' + a_1' \frac{x}{1} + a_2' \frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + a_{m_1}' \frac{x^{m_1}}{1\cdot 2 \ldots m_1}\right) e^{\alpha_1 x}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \left(a_0^\lambda + a_1^\lambda \frac{x}{1} + a_2^\lambda \frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + a_{m_\lambda}^\lambda \frac{x^{m_\lambda}}{1\cdot 2 \ldots m_\lambda}\right) e^{\alpha_\lambda x}.$$

Hier ist

$$k(z) = \frac{a_0'}{z-\alpha_1} + \frac{a_1'}{(z-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{a_{m_1}'}{(z-\alpha_1)^{m_1+1}}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{a_0^\lambda}{z-\alpha_\lambda} + \frac{a_1^\lambda}{(z-\alpha_\lambda)^2} + \ldots + \frac{a_{m_\lambda}'}{(z-\alpha_\lambda)^{m_\lambda+1}}.$$

Die Partialbruchzerlegung der Funktion

$$\frac{k(z)}{1-k(z)}$$

sei

$$\frac{k(z)}{1-k(z)} = \frac{b_0'}{z-\beta_1} + \frac{b_1'}{(z-\beta_1)^2} + \ldots + \frac{b_{n_1}'}{(z-\beta_1)^{n_1+1}}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{b_0^\varrho}{z-\beta_\varrho} + \frac{b_1^\varrho}{(z-\beta_\varrho)^2} + \ldots + \frac{b_{n_\varrho}^\varrho}{(z-\beta_\varrho)^{n_\varrho+1}}.$$

Dann lautet die Lösung der gegebenen Integralgleichung

$$\mathfrak{K}(x) = \left(b_0' + b_1' \frac{x}{1} + b_2' \frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + b_{n_1}' \frac{x^{n_1}}{1\cdot 2 \ldots n_1}\right) e^{\beta_1 x}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \left(b_0^\varrho + b_1^\varrho \frac{x}{1} + b_2^\varrho \frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + b_{n_\varrho}^\varrho \frac{x^{n_\varrho}}{1\cdot 2 \ldots n_\varrho}\right) e^{\beta_\varrho x}.$$

Hier können in $K(x)$ und $\mathfrak{K}(x)$ die Größen a, α, b, β auch komplex sein, d. h. diese Funktionen können auch Glieder von der Form

$$x^n \cos \nu x\, e^{\mu x}, \qquad x^n \sin \nu x\, e^{\mu x}$$

enthalten.

2. $$\mathfrak{K}(x) = a J_0(x) + a \int_0^x \mathfrak{K}(\xi) J_0(x-\zeta)\, d\xi,$$

wo $J_0(x)$ die Besselsche Funktion der Ordnung 0 ist;

$$k(z) = a \int_0^\infty e^{-xz} J_0(x)\, dx = \frac{a}{\sqrt{1+z^2}},$$

$$\frac{k(z)}{1-k(z)} = \frac{a}{\sqrt{1+z^2}-a} = \frac{a(\sqrt{1+z^2}-z)}{z^2+b^2} + \frac{az}{z^2+b^2} + \frac{a^2}{z^2+b^2},$$

wobei $b = \sqrt{1-a^2}$ gesetzt ist.

Die Funktion

$$\mathfrak{K}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_c e^{xz}\frac{k(z)}{1-k(z)}dz$$

genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\mathfrak{K}}{dx^2} + b^2\mathfrak{K} = \frac{a}{2\pi i}\int_c e^{xz}\sqrt{1+z^2}\,dz = a\frac{J_1(x)}{x},$$

wo $J_1(x)$ die Besselsche Funktion erster Ordnung bezeichnet. Außerdem ist $\mathfrak{K}(0) = a$, $\mathfrak{K}'(0) = a^2$. Somit ist

$$\mathfrak{K}(x) = \frac{a}{b}\left\{\int_0^x \sin b(x-t)\frac{J_1(t)}{t}dt + a\sin bx + b\cos bx\right\}.$$

Dies Resultat läßt sich leicht verifizieren.

3. Die Abelsche Gleichung zweiter Art

$$\mathfrak{K}(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi x}} + \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{\mathfrak{K}(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}d\xi,$$

$$k(z) = \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-xz}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{a}{\sqrt{z}},$$

$$\frac{k(z)}{1-k(z)} = \frac{a}{\sqrt{z}-a} = \frac{a}{\sqrt{z}} + \frac{a^2}{z-a^2} + \frac{a^3}{\sqrt{z}(z-a^2)}.$$

Die Auswertung des Integrals

$$\mathfrak{K}(x) = \frac{a}{2\pi i}\int_c e^{xz}\frac{dz}{\sqrt{z}-a}$$

ergibt

$$\mathfrak{K}(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi x}} + a^2 e^{a^2 x}[1 + \Theta(a\sqrt{x})]$$

wo

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$$

das bekannte Fehlerintegral ist.

4. $$G(x) = 1 - e^{-x} - a\int_0^x G(\xi)\,Ei(-(x-\xi))\,d\xi,$$

wo

$$-Ei(-x)=\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt$$

gesetzt ist. Die Ableitung $G'(x)$ genügt der Integralgleichung

$$G'(x)=e^{-x}-a\int_0^x G'(\xi)\,Ei(-(x-\xi))\,d\xi,$$

welche in der Theorie der Lichtzerstreuung von Bedeutung ist. Die Resolvente $\mathfrak{R}(x)$ dieser beiden Gleichungen drückt sich durch $G(x)$ wie folgt aus:

$$\mathfrak{R}(x)=G'(x)+G''(x),$$

was leicht zu verifizieren ist.

Wir haben

$$k(z)=-a\int_0^\infty e^{-xz}\,Ei(-x)\,dx=a\frac{\lg(1+z)}{z},$$

$$f(z)=\int_0^\infty e^{-xz}(1-e^{-x})\,dx=\frac{1}{z(z+1)}.$$

Folglich ist

$$G(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_c e^{xz}\frac{dz}{(z+1)[z-a\lg(z+1)]}.$$

Nun ist es leicht zu verifizieren, daß

$$\int_0^x e^{(x-u)}(z+1)^{-(1-au)}\,du=-\frac{(z+1)^{ax-1}}{z-a\lg(z+1)}+\frac{e^{xz}}{(z+1)[z-a\lg(z+1)]}.$$

Integrieren wir beide Seiten nach z, so verschwindet für $ax<1$ das Integral des ersten Gliedes auf der rechten Seite. Ferner ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int e^{(x-u)z}(z+1)^{-(1-au)}\,dz=e^{-(x-u)}\frac{(x-u)^{-au}}{\Gamma(1-au)}$$

und es wird erhalten:

$$G(x)=\int_0^x e^{-(x-u)}\frac{(x-u)^{-au}}{\Gamma(1-au)}\,du \qquad (ax<1).$$

Wir werden nun zeigen, daß dieser Ausdruck der gegebenen Integralgleichung wirklich genügt. Zu diesem Zwecke beweisen wir zunächst die Relation

$$L = \int_0^y - Ei(-t)\, e^{-(y-t)} (y-t)^{-au}\, dt =$$

$$(*) \qquad = \frac{1}{a}\, \Gamma(1-au) \int_0^y \frac{d}{du} \frac{e^{-t} t^{-au}}{\Gamma(1-au)}\, dt .$$

Wir schreiben in L $t = yv$ und berechnen die Ableitung $\frac{dL}{dy}$. Nach partieller Integration, wobei von der Gleichung

$$\int_0^y - Ei(-t)\, e^t\, dt = - Ei(-y)\, e^y + \lg y + C$$

(C Eulersche Konstante) Gebrauch gemacht wird, finden wir, daß das Glied mit $Ei(-yv)$ im Integrand sich aushebt und daß die übrigen Glieder sich mit Hilfe der Relation

$$\int_0^1 (1-v)^{-au} (-C - \lg v)\, dv = \frac{1}{a} \Gamma(1-au) \frac{d}{du} \frac{1}{\Gamma(2-au)}$$

auswerten lassen. Zuletzt erhalten wir für $\frac{dL}{dy}$ den Ausdruck

$$\frac{dL}{dy} = \frac{1}{a}\, \Gamma(1-au) \frac{d}{du} \frac{e^{-y} y^{-au}}{\Gamma(1-au)} .$$

Außerdem ist für $y = 0$ $L = 0$. Damit ist der Ausdruck $(*)$ für L bewiesen.

Substituieren wir den Ausdruck für $G(\xi)$ in die Integralgleichung, so haben wir

$$a \int_0^x - Ei(-(x-\xi))\, G(\xi)\, d\xi =$$

$$= a \int_0^x - Ei(-(x-\xi))\, d\xi \int_0^\xi e^{-(\xi-u)} \frac{(\xi-u)^{-au}}{\Gamma(1-au)}\, du =$$

$$= a \int_0^x \frac{du}{\Gamma(1-au)} \int_u^x - Ei(-(x-\xi))\, e^{-(\xi-u)} (\xi-u)^{-au}\, d\xi =$$

$$= \int_0^x du \int_0^{x-u} \frac{d}{du} e^{-t} \frac{t^{-au}}{\Gamma(1-au)}\, dt =$$

$$= \int_0^x dt \int_0^{x-t} \frac{d}{du} e^{-t} \frac{t^{-au}}{\Gamma(1-au)}\, du =$$

$$= \int_0^x dt \left\{ e^{-t} \frac{t^{-a(x-t)}}{\Gamma(1-a(x-t))} - e^{-t} \right\} =$$

$$= G(x) - (1 - e^{-x}), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Entwickelt man den Integranden in $G(x)$ nach Potenzen von a, und integriert man gliedweise, so erhält man eine Reihe, die für alle Werte von x (und nicht nur für $ax < 1$) konvergiert und zur numerischen Berechnung geeignet ist. Das n-te Glied dieser Reihe läßt sich durch e^{-x}, Potenzen von x und $\lg x$ und durch die ersten n Funktionen

$$E_k(x) = x \int_0^1 e^{-xu} \frac{(-\lg u)^k}{k!}\, du = x - \frac{x^2}{2!\,2^k} + \frac{x^3}{3!\,3^k} - \dots$$

ausdrücken.

Ich möchte noch ganz kurz einige Beispiele der Gleichungen erster Art betrachten.

5. Die Gleichung

$$\int_0^x H'(\xi)\, y(\alpha, \gamma, x-\xi)\, d\xi = 1 \qquad (x>0,\ 0<\gamma<1),$$

wo

$$y(\alpha, \gamma, x) = \frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\left\{1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{x}{1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{1\cdot 2} + \dots\right\}$$

gesetzt ist, hat eine Lösung

$$H'(x) = y(-\alpha, 1-\gamma, x).$$

Die Lösung der allgemeinen Gleichung

$$\int_0^x G(\xi)\, y(\alpha, \gamma, x-\xi)\, d\xi = F(x)$$

lautet

$$G(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x F(\xi)\, y(-\alpha, 1-\gamma, x-\xi)\, d\xi.$$

Für $\alpha = 0$, $\gamma = \frac{1}{2}$ geht diese Gleichung in die Abelsche Gleichung über. Der Beweis ist analog dem im Abelschen Falle.

6. Die Gleichung

$$\int_0^x H(\xi)(a + \lg(x-\xi))\, d\xi = x$$

hat eine Lösung

$$H(x) = -\int_0^\infty \frac{e^{(a-C)t}\, x^t}{\Gamma(1+t)}\, dt,$$

wo C die Eulersche Konstante ist. Der Beweis ist einfach.

7. Die Gleichung

$$\int_0^x H(\xi)[a + Ei(-(x-\xi))]\, d\xi = x$$

hat eine Lösung

$$H(x) = G(x) + \int_0^x G(t)\,dt,$$

wo $G(x)$ die Lösung von

$$\int_0^x G(\xi)\,[a + Ei(-(x-\xi))]\,d\xi = 1 - e^{-x}$$

ist und durch die Formel

$$G(x) = -e^{-x} \int_0^\infty \frac{e^{at}\,x^t}{\Gamma(1+t)}\,dt$$

sich ausdrücken läßt. Der Beweis gestaltet sich analog dem Falle der entsprechenden Gleichung zweiter Art.

Petrograd, Physikalisches Institut der Universität, Januar 1923.

(Eingegangen am 3. März 1923.)

Anmerkung bei der Korrektur. Vor kurzem habe ich die Arbeiten von Whittaker (Proc. Roy. Soc. (A) **94** (1918), p. 367) und von P. J. Browne (Comptes Rendus **158** (1914), p. 1562) kennen gelernt. Whittaker betrachtet Spezialfälle der hier diskutierten Integralgleichungen (Beispiel 1 dieser Arbeit). Browne betrachtet Integralgleichungen von einem anderen Typus, deren Lösungen eine willkürliche Konstante enthalten. Die hier gefundenen Resultate scheinen jedoch unbekannt zu sein.

(Dezember 1923.)

Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen.

Von

E. Study in Bonn.

Teil IV.

Inhalt.

§ 11. Zusammenhang der entwickelten Theorie mit der projektiven Geometrie im R_3.

§ 12. Die projektiven Gruppen $\mathfrak{G}_{16}$, $\mathfrak{H}_{16}$ und $\mathfrak{G}_{16}^*$, $\mathfrak{H}_{16}^*$.

§ 11.

Zusammenhang der entwickelten Theorie mit der projektiven Geometrie im R_3.

Als eines Rechnungsmittels haben wir uns bisher ausschließlich der Quaternionentheorie bedient. Damit sind wir der Tatsache gerecht geworden, daß die betrachtete kleine Welt geometrischer Figuren wirklich eine „Welt für sich“ darstellt. In dem *erweiterten* Möbiusschen Kontinuum aber, also im komplexen Gebiete der Mannigfaltigkeit M_4^2, sind die untersuchten Transformationen im Grunde dasselbe wie die Kollineationen und Korrelationen der ebenfalls ins Komplexe hinein fortgesetzten projektiven Geometrie im gewöhnlichen Raume, wenn nur als Raumelement die gerade Linie benutzt wird. Wir würden also eine beunruhigende Lücke in unseren Überlegungen lassen, wollten wir nicht noch versuchen, in das Wesen dieses Zusammenhanges tiefer einzudringen. Dazu bedarf es noch einiger Vorbereitungen.

Zunächst beweisen wir den zu Schluß des § 3 ausgesprochenen Lehrsatz. Es seien etwa vorgelegt die bilinearen Gleichungen

$$T = \tilde{x}_1 \tilde{a} \tilde{v}_2 + \tilde{x}_2 \tilde{b} \tilde{v}_2 - \tilde{x}_1 \tilde{c} \tilde{v}_1 - \tilde{x}_2 \tilde{d} \tilde{v}_1 = 0,$$
$$'T = u_1 d y_2 - u_2 b y_2 + u_1 c y_1 - u_2 a y_1 = 0$$

(vgl. Nr. 109 und 120), und sie mögen zunächst Bilder von *Transformationen* sein,

$$(T): \begin{matrix} a x_1 + b x_2 = x_1', \\ c x_1 + d x_2 = x_2', \end{matrix} \qquad ('T): \begin{matrix} u_1 d - u_2 b = u_1', \\ - u_1 c + u_2 a = u_2', \end{matrix}$$

(Nr. 112, 121), die im ersten Falle vermöge der Substitutionen

$$x_1 x_2^{-1} = z, \qquad x_1' x_2'^{-1} = v_2^{-1} v_1 = z'$$

und im zweiten vermöge der Substitutionen

$$u_2^{-1} u_1 = z, \qquad u_2'^{-1} u_1' = y_1 y_2^{-1} = z'$$

die zueinander entgegengesetzten (und eigentlichen) Transformationen einer Quaternion z

$$\frac{az+b}{cz+d} = z', \qquad \frac{dz-b}{-cz+a} = z'$$

nach sich ziehen[57]). Wollen wir nun zur Grenze $\nabla_l = 0$ übergehen, und zwar derart, daß nicht alle a, b, c, d zugleich Null werden (was ja hier keinen Sinn haben würde), so erschöpfen wir im Falle reeller Quaternionen a, b, c, d schon *alle* überhaupt vorliegenden Möglichkeiten, wenn wir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l r & l s \\ m r & m s \end{pmatrix}$$

setzen, wobei l, m, r, s ebenfalls reell sind und weder l und m noch r und s zugleich Null sind (s. Nr. 25). So entstehen in der Grenze *ausgeartete Abhängigkeiten*[58]),

$$T = (\tilde{x}_1 \tilde{r} + \tilde{x}_2 \tilde{s})(\tilde{l}\tilde{v}_2 - \tilde{m}\tilde{v}_1) = 0,$$
$$'T = (u_1 m - u_2 l)(s y_2 + r y_1) = 0;$$

$$(T): \begin{matrix} l(r x_1 + s x_2) = x_1', \\ m(r x_1 + s x_2) = x_2', \end{matrix} \qquad ('T): \begin{matrix} (u_1 m - u_2 l) s = u_1', \\ -(u_1 m - u_2 l) r = u_2'; \end{matrix}$$

und aus ihnen wird der behauptete Satz abgelesen: Man erhält

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{l}{m}, \quad \text{wenn} \quad z \neq -\frac{s}{r} \quad \left(\text{sonst } \frac{0}{0}\right),$$

$$\frac{dz'-b}{-cz'+a} = -\frac{s}{r}, \quad \text{wenn} \quad z' \neq \frac{l}{m} \quad \left(\text{sonst } \frac{0}{0}\right).$$

---

[57]) Es sei daran erinnert, daß die unabhängige Veränderliche immer z, die abhängige immer z' heißt.

[58]) Man kann auch sagen „*Ausartungen von Transformationen*", aber nicht, wie es leider oft geschieht, „ausgeartete Transformationen", was nach der — üblichen und sachgemäßen — Erklärung des Transformationsbegriffs eine *contradictiv in adjecto* ist.

Die Quotienten $l m^{-1}$ und $-r^{-1} s$ haben nach unserer Erklärung im Reellen stets einen bestimmten Sinn (unter Umständen die Bedeutung ∞).

Wir werden ferner den Begriff der Antikollineation zu gebrauchen haben.

Antikollineationen und *Antikorrelationen* sind in die Geometrie eingeführt worden von C. Segre[59]). Sie entstehen aus Kollineationen und Korrelationen dadurch, daß man diese mit dem *Konjugium* zusammensetzt, d. h. mit der Transformation, die aus jeder Figur die konjugiert-komplexe Figur entstehen läßt. Zu den Antikollineationen gehört das Konjugium selbst — eine oder vielmehr die involutorische Antikollineation, die alle reellen Figuren in Ruhe läßt.

Im projektiven Kontinuum $(n+1)$-ter Stufe, d. h. von n komplexen Dimensionen, finden sich nun eine oder zwei Arten oder besser Klassen *involutorischer* Antikollineationen, je nachdem die Zahl n gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle nämlich sind alle überhaupt vorhandenen involutorischen Antikollineationen zum Konjugium kollinear, während es bei ungeraden Werten der Zahl n noch eine zweite Klasse von Antikollineationen gibt, die nicht zum Konjugium, wohl aber zueinander kollinear sind; die Individuen beider Klassen hängen von je $n(n+2)$ wesentlichen Konstanten ab.

Uns gehen hier der Fall $n = 3$ und die involutorischen Antikollineationen der zweiten Klasse an, zu denen die in den folgenden Formeln durch homogene Punkt-, Linien- und Ebenenkoordinaten dargestellte *reelle* Transformation gehört[60]):

[8]
$$\begin{gathered}
\pm \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}'_0, \quad \mp \bar{\mathfrak{x}}_0 = \mathfrak{x}'_1, \quad \pm \bar{\mathfrak{x}}_3 = \mathfrak{x}'_2, \quad \mp \bar{\mathfrak{x}}_3 = \mathfrak{x}'_3; \\
\bar{\mathfrak{X}}_{01} = \mathfrak{X}'_{01}, \quad -\bar{\mathfrak{X}}_{31} = \mathfrak{X}'_{02}, \quad -\bar{\mathfrak{X}}_{12} = \mathfrak{X}'_{03}, \\
\bar{\mathfrak{X}}_{23} = \mathfrak{X}'_{23}, \quad -\bar{\mathfrak{X}}_{02} = \mathfrak{X}'_{31}, \quad -\bar{\mathfrak{X}}_{03} = \mathfrak{X}'_{12}; \\
\pm \bar{\mathfrak{u}}_1 = \mathfrak{u}'_0, \quad \mp \bar{\mathfrak{u}}_0 = \mathfrak{u}'_1, \quad \pm \bar{\mathfrak{u}}_3 = \mathfrak{u}'_2, \quad \mp \bar{\mathfrak{u}}_2 = \mathfrak{u}'_3.\ ^{61})
\end{gathered}$$

---

[59]) Un nuovo campo di ricerche geometriche. Atti di Torino, vv. 25, 26 (1890). Vgl. auch Rendiconti di Palermo **5** (1891), S. 103 und Math. Ann. **40** (1892), S. 432.

[60]) Proportionalitätsfaktoren, die die Formeln unnötig belasten, sind unterdrückt. Von den zweierlei Zeichen für Linienkoordinaten wird nur die eine Art benutzt (die andere heißt $\mathfrak{U}_{23} = \mathfrak{X}_{01}$ usw., $\mathfrak{U}_{01} = \mathfrak{X}_{23}$ usw.).

[61]) Diese Transformation entsteht durch Zusammensetzung des Konjugiums mit einer reellen involutorischen Kollineation; wie diese ihre beiden Komponenten ist sie reell, weil sie aus konjugiert-komplexen (und insbesondere reellen) Figuren ebensolche hervorgehen läßt.

Man sieht, daß eine solche Antikollineation keine Inzidenzpunkte und keine Inzidenzebenen hat, daß sie aber dem Konjugium darin ähnlich ist, daß auch bei ihr ∞^4 gerade Linien in Ruhe bleiben, die ein (nicht analytisches!) Kontinuum bilden. Wie die Formeln [8] zeigen, lassen sich die Koordinaten dieser *Inzidenzgeraden* $\mathfrak{Z}$ (durch passende Verfügung über einen willkürlichen komplexen Faktor) so wählen, daß für sie die (antianalytischen) Gleichungen

[9]
$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\mathfrak{Z}}_{01} &= \mathfrak{Z}_{01}, & \bar{\mathfrak{Z}}_{23} &= \mathfrak{Z}_{23}, \\ -\bar{\mathfrak{Z}}_{31} &= \mathfrak{Z}_{02}, & -\bar{\mathfrak{Z}}_{12} &= \mathfrak{Z}_{03} \end{aligned}}$$

bestehen.

Durch jeden Punkt geht, wie man ebenfalls sogleich erkennt, *ausnahmslos* eine dieser Geraden, und in jeder Ebene liegt eine von ihnen; die Punkte jeder Inzidenzgeraden werden *antiprojektiv* (also nicht analytisch) derart involutorisch gepaart, daß bei der üblichen Art von Abbildung der $\infty^{2\cdot 1}$ Punkte der Geraden auf die Riemannsche Zahlenkugel eine Inversion ohne Inzidenzpunkte (also eine Spiegelung an einem *idealen* Kreis) entsteht, und Entsprechendes gilt für die $\infty^{2\cdot 1}$ Ebenen einer Inzidenzgeraden.

Veranlaßt durch die Analogie, die diese Antikollineationen zweiter Art mit denen erster Art und insbesondere mit dem Konjugium haben, nennen wir nun *quasi-reell* jede Figur des projektiven Kontinuums R_3, die bei der Transformation [8] in Ruhe bleibt[62]). Quasi-reell sind dann alle ∞^4 Inzidenzgeraden. Quasi-reelle Kollineationen und Korrelationen sind natürlich dasselbe wie *automorphe* Kollineationen und Korrelationen der vorgelegten Antikollineation, oder also, dasselbe wie Kollineationen und Korrelationen, die mit der Antikollineation vertauschbar sind.

Wir behaupten nun:

Bei jeder durch eine lineare Transformation vermittelten Abbildung des (erweiterten) Möbiusschen Kontinuums M_4 *auf das Plückersche Linienkontinuum (das Kontinuum der* $\infty^{2\cdot 4}$ *Geraden im* R_3 *der projektiven Geometrie) geht das Konjugium in* M_4 *über in irgendeine in-*

---

[62]) Es kommt natürlich wenig darauf an, daß das gerade die Transformation [8] ist; nur muß sie unter den involutorischen Antikollineationen bestimmt gewählt sein. Man kann überhaupt von *quasi-reellen* Figuren sprechen in bezug auf eine involutorische Antikollineation oder Antikorrelation. Eine weitergehende Betrachtung würde zu der Einsicht führen, daß damit ein Grundbegriff der projektiven Geometrie gebildet ist. Im Falle des Konjugiums reduziert sich dieser Begriff auf den der gewöhnlichen Realität. Man findet mehrere Anwendungen dieser Begriffsbildung in des Verfassers Aufsatz über Kugelgeometrie (Math. Annalen **91** (1924), § 17).

volutorische Antikollineation ohne Inzidenzpunkte und Inzidenzebenen. Reellen Figuren in M_4 werden also durch eine solche Abbildung zu der Antikollineation gehörige quasi-reelle Figuren zugeordnet, und umgekehrt. Insbesondere entsprechen den ∞^4 reellen Punkten des Möbiusschen Kontinuums die ∞^4 Inzidenzgeraden der Antikollineation. Ferner entspricht den $2\cdot\infty^{15}$ reellen konformen Transformationen in M_4 eine zu ihr holomorphe Gruppe quasi-reeller Kollineationen und Korrelationen, nämlich die Gruppe aller automorphen Kollineationen und Korrelationen der Antikollineation. Oder, was dasselbe ist, es entsprechen jenen konformen Transformationen projektive Transformationen im R_3, die das System der ∞^4 Inzidenzlinien der Antikollineation in Ruhe lassen, und umgekehrt.

Offenbar wird es genügen, von diesen Abbildungen ein Exemplar herzustellen: Die übrigen erhält man daraus durch Ausführung irgendwelcher kollinearer und korrelativer Transformationen in R_3.

Die abzuleitenden Formeln seien zunächst übersichtlich zusammengestellt, und zwar mit willkürlicher Verfügung über einige unbestimmt bleibende Proportionalitätsfaktoren.

Eine der im Satze genannten Abbildungen ist gegeben durch die folgenden Formeln, deren Verständnis durch die Gleichungen [1] in § 2 und (56, 57) in § 4 vermittelt wird:

[10]
$$\begin{aligned}
\sigma\cdot\mathfrak{Z}_{01} &= \sigma\cdot\ (Z_\alpha - Z_\omega) &&= z\tilde{z} = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21},\\
\sigma\cdot\mathfrak{Z}_{02} &= \sigma\cdot(-iZ_1 + Z_2) &&= -iz_1 + z_2 = -z_{12},\\
\sigma\cdot\mathfrak{Z}_{03} &= \sigma\cdot\ (Z_0 + iZ_3) &&= \ \ z_0 + iz_3 = \ \ z_{11},\\
\sigma\cdot\mathfrak{Z}_{23} &= \sigma\cdot\ (Z_\alpha + Z_\omega) &&= \ \ 1,\\
\sigma\cdot\mathfrak{Z}_{31} &= \sigma\cdot(-iZ_1 - Z_2) &&= -iz_1 - z_2 = -z_{21},\\
\sigma\cdot\mathfrak{Z}_{12} &= \sigma\cdot(-Z_0 + iZ_3) &&= -z_0 + iz_3 = -z_{22}.
\end{aligned}$$

Man sieht unmittelbar, daß hierdurch eine eindeutig-umkehrbare und überall stetige Abbildung der Mannigfaltigkeit M_4^2 oder des Möbiusschen Kontinuums auf das Plückersche Linienkontinuum bewirkt wird, *und daß bei ihr das Konjugium*

$$\bar{Z}_k = Z'_k, \quad \bar{z} = z'$$

in die Antikollineation [8] *und der reelle Zug der M_4^2 in die Mannigfaltigkeit der ∞^4 Inzidenzgeraden der Antikollineation übergeht.*

Hiermit sind alle im Satze genannten Zuordnungen bereits vollkommen bestimmt, man wird aber die Kollineationen und Korrelationen, die als *Bilder* konformer Transformationen in M_4 erscheinen, ohne weiteres nur in Linienkoordinaten dargestellt erhalten, was noch keine genügende Einsicht

in den Sachverhalt gibt. Die folgenden Formeln liefern diese selben Kollineationen und Korrelationen, dargestellt in Punkt- und Ebenenkoordinaten, jede geschrieben als System linearer Gleichungen und, auf die auch sonst übliche Art, als bilineare Form, und zusammengestellt mit den aus Quaternionen gebildeten Transformationen und bilinearen oder quasi-bilinearen Formen, denen sie zugeordnet werden soll.

$$T = \tilde{x}_1\tilde{a}\tilde{v}_2 + \tilde{x}_2\tilde{b}\tilde{v}_2 - \tilde{x}_1\tilde{c}\tilde{v}_1 - \tilde{x}_2\tilde{d}\tilde{v}_1;$$
$$\begin{aligned} a x_1 + b x_2 &= x_1', \\ c x_1 + d x_2 &= x_2'; \end{aligned} \qquad \frac{az+b}{cz+d} = z';$$

[11]
$$T_* = \begin{cases} \mathfrak{x}_0 a_{11}\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{x}_0 a_{21}\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{x}_0 c_{11}\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{x}_0 c_{21}\mathfrak{v}_3 \\ + \mathfrak{x}_1 a_{12}\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{x}_1 a_{22}\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{x}_1 c_{12}\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{x}_1 c_{22}\mathfrak{v}_3 \\ + \mathfrak{x}_2 b_{11}\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{x}_2 b_{21}\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{x}_2 d_{11}\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{x}_2 d_{21}\mathfrak{v}_3 \\ + \mathfrak{x}_3 b_{12}\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{x}_3 b_{22}\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{x}_3 d_{12}\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{x}_3 d_{22}\mathfrak{v}_3; \end{cases}$$
$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_0 a_{11} + \mathfrak{x}_1 a_{12} + \mathfrak{x}_2 b_{11} + \mathfrak{x}_3 b_{12} &= \mathfrak{x}_0', \\ \mathfrak{x}_0 a_{21} + \mathfrak{x}_1 a_{22} + \mathfrak{x}_2 b_{21} + \mathfrak{x}_3 b_{22} &= \mathfrak{x}_1', \\ \mathfrak{x}_0 c_{11} + \mathfrak{x}_1 c_{12} + \mathfrak{x}_2 d_{11} + \mathfrak{x}_3 d_{12} &= \mathfrak{x}_2', \\ \mathfrak{x}_0 c_{21} + \mathfrak{x}_1 c_{22} + \mathfrak{x}_2 d_{21} + \mathfrak{x}_3 d_{22} &= \mathfrak{x}_3'. \end{aligned}$$

Dabei ist *zum Beispiel*

$$\begin{aligned} a_0 + i a_3 &= a_{11}, & i a_1 - a_2 &= a_{12}, \\ i a_1 + a_2 &= a_{21}, & a_0 - i a_3 &= a_{22}, \end{aligned}$$

(*usw.*), und also, *wenn a reell*,

$$a_{22} = \bar{a}_{11}, \qquad a_{21} = -\bar{a}_{12}.$$

$$\mathsf{T} = u_1\alpha y_2 + u_2\beta y_2 - u_1\gamma y_1 - u_1\delta y_1;$$
$$\begin{aligned} u_1\alpha + u_2\beta &= u_1', \\ u_1\gamma + u_2\delta &= u_2'; \end{aligned} \qquad \frac{z\alpha+\beta}{z\gamma+\delta} = z';$$

[12]
$$\mathsf{T}_* = \begin{cases} \mathfrak{u}_0\delta_{11}\mathfrak{y}_0 + \mathfrak{u}_0\delta_{12}\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{u}_0\beta_{11}\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{u}_0\beta_{12}\mathfrak{y}_3 \\ + \mathfrak{u}_1\delta_{21}\mathfrak{y}_0 + \mathfrak{u}_1\delta_{22}\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{u}_1\beta_{21}\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{u}_1\beta_{22}\mathfrak{y}_3 \\ - \mathfrak{u}_2\gamma_{11}\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{u}_2\gamma_{12}\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{u}_2\alpha_{11}\mathfrak{y}_2 + \mathfrak{u}_2\alpha_{12}\mathfrak{y}_3 \\ - \mathfrak{u}_3\gamma_{21}\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{u}_3\gamma_{22}\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{u}_3\alpha_{21}\mathfrak{y}_2 + \mathfrak{u}_3\alpha_{21}\mathfrak{y}_3; \end{cases}$$
$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_0\delta_{11} + \mathfrak{u}_1\delta_{21} - \mathfrak{u}_2\gamma_{11} - \mathfrak{u}_3\gamma_{21} &= \mathfrak{u}_0', \\ \mathfrak{u}_0\delta_{12} + \mathfrak{u}_1\delta_{22} - \mathfrak{u}_2\gamma_{12} - \mathfrak{u}_3\gamma_{22} &= \mathfrak{u}_1', \\ -\mathfrak{u}_0\beta_{11} - \mathfrak{u}_1\beta_{21} + \mathfrak{u}_2\alpha_{11} + \mathfrak{u}_3\alpha_{21} &= \mathfrak{u}_2', \\ -\mathfrak{u}_0\beta_{12} - \mathfrak{u}_1\beta_{22} + \mathfrak{u}_2\alpha_{12} + \mathfrak{u}_3\alpha_{22} &= \mathfrak{u}_3'. \end{aligned}$$

Die zu T und T gehörigen Nablafunktionen $\begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{Bmatrix}$ sind gleich den entsprechenden Determinanten.

Sind die Formen (und Transformationen) T, T verschwistert, so sind die entsprechenden quaternären Formen (und Transformationen) T_*, T_* kontragredient.

In der Tat ziehen die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta a - \beta c, & \delta b - \beta d \\ -\gamma a + \alpha c, & -\gamma b + \alpha d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die man nach der Regel [5] in § 2 in Gleichungen

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(usw.) übersetzt, die Gleichung

$$\mathfrak{u}_0\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{u}_1\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{u}_2\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{u}_3\mathfrak{x}_3 = \mathfrak{u}'_0\mathfrak{x}'_0 + \mathfrak{u}'_1\mathfrak{x}'_1 + \mathfrak{u}'_2\mathfrak{x}'_2 + \mathfrak{u}'_3\mathfrak{x}'_3$$

nach sich.

Die Transformationen T_* und T_* werden also beide dieselbe Transformation der Linienkoordinaten

$$\mathfrak{X}_{01} = \mathfrak{U}_{23}, \quad \mathfrak{X}_{02} = \mathfrak{U}_{31}, \quad \mathfrak{X}_{03} = \mathfrak{U}_{12},$$
$$\mathfrak{X}_{23} = \mathfrak{U}_{01}, \quad \mathfrak{X}_{31} = \mathfrak{U}_{02}, \quad \mathfrak{X}_{12} = \mathfrak{U}_{03}$$

hervorrufen („induzieren"), die aussagt, wie die Punkte des sphärischen Kontinuums M_4^2 oder des Möbiusschen Kontinuums M_4 untereinander vertauscht werden. Im R_3 handelt es sich dabei immer um dieselbe *Kollineation* $\mathfrak{T}_*$, die nur auf verschiedene Objekte — Punkte, Ebenen, gerade Linien — angewendet wird.

In derselben Wechselbeziehung wie die Gleichungssysteme [11] und [12] stehen schließlich die folgenden [13] und [14], die Zuordnungen quasibilinearer Formen, uneigentlicher Quaternionentransformationen und quaternärer Korrelationen enthalten:

$$\Sigma = u_1\tilde{l}\tilde{v}_2 + u_2\tilde{m}\tilde{v}_2 - u_1\tilde{n}\tilde{v}_1 - u_2\tilde{r}\tilde{v}_1;$$
$$l\tilde{u}_1 + m\tilde{u}_2 = x'_1, \quad \frac{l\tilde{z}+m}{n\tilde{z}+r} = z';$$
$$n\tilde{u}_1 + r\tilde{u}_2 = x'_2;$$

$$[13]\qquad \Sigma_* = \begin{cases} u_0 m_{12} \mathfrak{v}_0 + u_0 m_{22} \mathfrak{v}_1 + u_0 r_{12} \mathfrak{v}_2 + u_0 r_{22} \mathfrak{v}_3 \\ - u_1 m_{11} \mathfrak{v}_0 - u_1 m_{21} \mathfrak{v}_1 - u_1 r_{11} \mathfrak{v}_2 - u_1 r_{21} \mathfrak{v}_3 \\ - u_2\ l_{12} \mathfrak{v}_0 - u_2\ l_{22} \mathfrak{v}_1 - u_2 n_{12} \mathfrak{v}_2 - u_2 n_{22} \mathfrak{v}_3 \\ + u_3\ l_{11} \mathfrak{v}_0 + u_3\ l_{21} \mathfrak{v}_1 + u_3 n_{11} \mathfrak{v}_2 + u_3 n_{21} \mathfrak{v}_3 ; \end{cases}$$

$$u_0 m_{12} - u_1 m_{11} - u_2\ l_{12} + u_3\ l_{11} = \mathfrak{x}_0',$$
$$u_0 m_{22} - u_1 m_{21} - u_2\ l_{22} + u_3\ l_{21} = \mathfrak{x}_1',$$
$$u_0\ r_{12} - u_1\ r_{11} - u_2 n_{12} + u_3 n_{11} = \mathfrak{x}_2',$$
$$u_0\ r_{22} - u_1\ r_{21} - u_2 n_{22} + u_3 n_{21} = \mathfrak{x}_3';$$

$$S = \tilde{x}\lambda y_2 + \tilde{x}_2 \mu y_2 - \tilde{x}_1 \nu y_1 - \tilde{x}_2 \varrho y_1 ;$$
$$x_1\lambda + x_2\mu = u_1', \qquad \frac{\tilde{z}\lambda + \mu}{\tilde{z}\nu + \varrho} = z';$$
$$x_1\nu + x_2\varrho = u_2';$$

$$[14]\qquad S_* = \begin{cases} - \mathfrak{x}_0 \nu_{21} \mathfrak{y}_0 - \mathfrak{x}_0 \nu_{22} \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{x}_0 \lambda_{21} \mathfrak{y}_2 + \mathfrak{x}_0 \lambda_{22} \mathfrak{y}_3 \\ + \mathfrak{x}_1 \nu_{11} \mathfrak{y}_0 + \mathfrak{x}_1 \nu_{12} \mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x}_1 \lambda_{11} \mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x}_1 \lambda_{12} \mathfrak{y}_3 \\ - \mathfrak{x}_2 \varrho_{21} \mathfrak{y}_0 - \mathfrak{x}_2 \varrho_{22} \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{x}_2 \mu_{21} \mathfrak{y}_2 + \mathfrak{x}_2 \mu_{22} \mathfrak{y}_3 \\ + \mathfrak{x}_3 \varrho_{11} \mathfrak{y}_0 + \mathfrak{x}_3 \varrho_{12} \mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x}_3 \mu_{11} \mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x}_3 \mu_{12} \mathfrak{y}_3 ; \end{cases}$$

$$- \mathfrak{x}_0 \nu_{21} + \mathfrak{x}_1 \nu_{11} - \mathfrak{x}_2 \varrho_{21} + \mathfrak{x}_3 \varrho_{11} = u_0',$$
$$- \mathfrak{x}_0 \nu_{22} + \mathfrak{x}_1 \nu_{12} - \mathfrak{x}_2 \varrho_{22} + \mathfrak{x}_3 \varrho_{12} = u_1',$$
$$+ \mathfrak{x}_0 \lambda_{21} - \mathfrak{x}_1 \lambda_{11} + \mathfrak{x}_2 \mu_{21} - \mathfrak{x}_3 \mu_{11} = u_2',$$
$$+ \mathfrak{x}_0 \lambda_{22} - \mathfrak{x}_1 \lambda_{12} + \mathfrak{x}_2 \mu_{22} - \mathfrak{x}_3 \mu_{12} = u_3'.$$

Um nun unseren Satz zu erweisen, wird man am besten mit der Zuordnung der Formen T und T_* beginnen (Formeln [11]). Man erkennt unmittelbar, daß Multiplikation zweier Formen T und Übergang von Formen T zu Formen T_* vertauschbare Operationen sind[63]): Die Gruppe [11] der linearen Transformationen von Quaternionenpaaren (x_1, x_2) und die Gruppe $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}'$ von linearen Transformationen der Veränderlichen $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ sind durch diese Zuordnung *holomorph* aufeinander bezogen; daher entsprechen sich ebenso auch die Gruppe G_{15} und die Kollineationsgruppe. Man wird hierzu aber noch bemerken, daß die erste Zuordnung eben nur eine unter $\infty^{2 \cdot 16}$ Zuordnungen derart ist: Daher darf es nicht überraschen, daß in der Sache ganz analoge Zuordnungen ziemlich verschieden aussehen. Insbesondere ist es möglich, die an sich ebenfalls in hohem Maße willkürliche Zuordnung von Formen T und T_* so auszuführen, daß immer dann, wenn T und T verschwistert sind, T_* und T_* kontragredient werden. Dieses eben leisten die Formeln [12]. Was aber Formen der Typen (Σ) und (S) zugeordnet werden soll [Nr. 13, 14], ist hieraus noch nicht ohne weiteres zu ersehen.

---

[63]) Die „Multiplikation" quaternärer bilinearer Formen oder Matrizen ist in üblicher Weise definiert. Z. B. $\Sigma \mathfrak{x}_i c_{ik} \mathfrak{v}_k \cdot \Sigma \mathfrak{x}_i c'_{ik} \mathfrak{v}_k = \Sigma \mathfrak{x}_i c_{ij} c'_{jk} \mathfrak{v}_k$.

Wir lassen nun, wie zuvor ausgeführt, die Form T in ein symbolisches (Quaternionen-) Produkt zerfallen,

$$T = (\tilde{x}_1\tilde{r} + x_2\tilde{s})(\tilde{l}\tilde{v}_2 - \tilde{m}\tilde{v}_1),$$

derart also, daß — wenn $N(r) \neq 0$, $N(m) \neq 0$ —

$$\underline{z} = -r^{-1}s \text{ und } \underline{z}' = lm^{-1}$$

die Unbestimmtheitspunkte der durch die Gleichung $T = 0$ bestimmten Quaternionenzuordnungen $z \rightarrow z'$ und $z \leftarrow z'$ werden (s. S. 175). Das hat zur Folge, daß die entsprechende quaternäre Form eine Summe von zwei Produkten wird:

$$T_* = \begin{cases} (\mathfrak{x}_0\, r_{11} + \mathfrak{x}_1\, r_{12} + \mathfrak{x}_2\, s_{11} + \mathfrak{x}_3\, s_{12}) \\ \cdot(l_{11}\mathfrak{v}_0 + l_{21}\mathfrak{v}_1 + m_{11}\mathfrak{v}_2 + m_{21}\mathfrak{v}_3) \\ + (\mathfrak{x}_0\, r_{21} + \mathfrak{x}_1\, r_{22} + \mathfrak{x}_2\, s_{21} + \mathfrak{x}_3\, s_{22}) \\ \cdot(l_{12}\mathfrak{v}_0 + l_{22}\mathfrak{v}_1 + m_{12}\mathfrak{v}_2 + m_{22}\mathfrak{v}_3). \end{cases}$$

Die Determinante (Diskriminante) einer solchen bilinearen Form hat höchstens den Rang 2, und zwar wird sie wirklich diesen Rang haben, wenn nicht die beiden vorderen Faktoren im Ausdruck von T_* zueinander proportional sind (für alle $\mathfrak{x}$) und auch die beiden hinteren es nicht sind. (Diese für alle $\mathfrak{v}$.) Die entsprechende Zuordnung (Ausartung einer Kollineation) $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ wird dann aus jeder Geraden $\mathfrak{X} = \widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}$, die nicht eine bestimmte Gerade $\underline{\mathfrak{X}}$ trifft, eine bestimmte Gerade $\underline{\mathfrak{X}}' = \widehat{\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'}$ hervorgehen lassen, und die mit ihr verbundene (transponierte) Zuordnung $\mathfrak{U} \leftarrow \mathfrak{U}'$ aus jeder Geraden $\mathfrak{U}'$ die nicht eine bestimmte Gerade $\underline{\mathfrak{U}}'$ trifft, eine bestimmte Gerade $\underline{\mathfrak{U}}$; und zwar ist dann, wie immer

$$\underline{\mathfrak{X}} = \underline{\mathfrak{U}}, \quad \underline{\mathfrak{X}}' = \underline{\mathfrak{U}}',$$

zu setzen; d. h. es ist z. B.

$$\underline{\mathfrak{X}}_{01} : \underline{\mathfrak{X}}_{02} : \underline{\mathfrak{X}}_{03} : \underline{\mathfrak{X}}_{23} : \underline{\mathfrak{X}}_{31} : \underline{\mathfrak{X}}_{12} = \underline{\mathfrak{U}}_{23} : \underline{\mathfrak{U}}_{31} : \underline{\mathfrak{U}}_{12} : \underline{\mathfrak{U}}_{01} : \underline{\mathfrak{U}}_{02} : \underline{\mathfrak{U}}_{03}.$$

Man berechnet leicht die Koordinaten dieser beiden Geraden; nach geeigneter Verfügung über Proportionalitätsfaktoren findet sich

[15]
$$\begin{aligned}
\underline{\mathfrak{X}}_{01} &= s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} = \underline{\mathfrak{U}}_{23}, & \underline{\mathfrak{X}}'_{01} &= l_{11}l_{22} - l_{12}l_{21} = \underline{\mathfrak{U}}'_{23}, \\
\underline{\mathfrak{X}}_{02} &= s_{12}r_{22} - r_{12}s_{22} = \underline{\mathfrak{U}}_{31}, & \underline{\mathfrak{X}}'_{02} &= l_{11}m_{12} - m_{11}l_{12} = \underline{\mathfrak{U}}'_{31}, \\
\underline{\mathfrak{X}}_{03} &= r_{12}s_{21} - s_{11}r_{22} = \underline{\mathfrak{U}}_{12}, & \underline{\mathfrak{X}}'_{03} &= l_{11}m_{22} - m_{21}l_{12} = \underline{\mathfrak{U}}'_{12}, \\
\underline{\mathfrak{X}}_{23} &= r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} = \underline{\mathfrak{U}}_{01}, & \underline{\mathfrak{X}}'_{23} &= m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12} = \underline{\mathfrak{U}}'_{01}, \\
\underline{\mathfrak{X}}_{31} &= r_{11}s_{21} - s_{11}r_{21} = \underline{\mathfrak{U}}_{02}, & \underline{\mathfrak{X}}'_{31} &= m_{21}l_{22} - l_{21}m_{22} = \underline{\mathfrak{U}}'_{02}, \\
\underline{\mathfrak{X}}_{12} &= r_{11}s_{22} - s_{12}r_{21} = \underline{\mathfrak{U}}_{03}; & \underline{\mathfrak{X}}'_{12} &= l_{21}m_{12} - m_{11}l_{22} = \underline{\mathfrak{U}}'_{03}.
\end{aligned}$$

Sind nun

$$N(r) = r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21}, \qquad N(m) = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$$

von Null verschieden, so können wir die Ausdrücke [15] zu den zuvor gefundenen

$$\underline{z} = -r^{-1}s, \qquad \underline{z}' = lm^{-1}$$

in eine einfache Beziehung setzen. Wir finden dann, im Falle von $\underline{z}$, die Gleichungen

$$\begin{aligned} N(r)\cdot \underline{z}_0 &= -r_0 s_0 - r_1 s_1 - r_2 s_2 - r_3 s_3 \\ &= -\frac{1}{2}(r_{11}s_{12} - r_{21}s_{12}) + \frac{1}{2}(r_{12}s_{21} - r_{22}s_{11}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(r)\cdot \underline{z}_1 &= -r_0 s_1 + r_1 s_0 + r_2 s_3 - r_3 s_2 \\ &= \frac{i}{2}(r_{11}s_{21} - r_{21}s_{11}) + \frac{i}{2}(r_{22}s_{12} - r_{12}s_{22}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(r)\cdot \underline{z}_2 &= -r_0 s_2 + r_2 s_0 + r_3 s_1 - r_1 s_3 \\ &= -\frac{1}{2}(r_{11}s_{21} - r_{21}s_{11}) + \frac{1}{2}(r_{22}s_{12} - r_{12}s_{22}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(r)\cdot \underline{z}_3 &= -r_0 s_3 + r_3 s_0 + r_1 s_2 - r_2 s_1 \\ &= -\frac{i}{2}(r_{11}s_{22} - r_{21}s_{12}) + \frac{i}{2}(r_{22}s_{11} - r_{12}s_{21}); \end{aligned}$$

oder also, wir erhalten, wenn noch

$$N(r) = r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} = \underline{\mathfrak{x}}_{23}$$

gesetzt wird,

[16]
$$\underline{z}_0 = \frac{\underline{\mathfrak{x}}_{03} - \underline{\mathfrak{x}}_{12}}{2\,\underline{\mathfrak{x}}_{23}}, \qquad \underline{z}_1 = i\,\frac{\underline{\mathfrak{x}}_{02} + \underline{\mathfrak{x}}_{31}}{2\,\underline{\mathfrak{x}}_{23}},$$
$$\underline{z}_2 = \frac{\underline{\mathfrak{x}}_{02} - \underline{\mathfrak{x}}_{31}}{2\,\underline{\mathfrak{x}}_{23}}, \qquad \underline{z}_3 = -i\,\frac{\underline{\mathfrak{x}}_{03} + \underline{\mathfrak{x}}_{12}}{2\,\underline{\mathfrak{x}}_{23}}.$$

Genau dieselben Formeln, nur akzentuiert, ergeben sich — wie vorherzusehen —, wenn die entsprechende Rechnung für $\underline{z}'$ durchgeführt wird. *Hiermit haben wir die Gleichungen* [10], in denen nur $\underline{z}$ durch z und $\underline{\mathfrak{x}}$ durch $\mathfrak{Z}$ ersetzt ist.

Es ist somit die Abbildung des (erweiterten) Möbiusschen Kontinuums oder der sphärischen Mannigfaltigkeit M_4^2 *auf das Plückersche Linienkontinuum gefunden, die die durch* [11], [12] *gegebene Zuordnung von Transformationen* T *und* T_*, *sowie* T *und* T_* *hervorruft.*

Sie bewirkt eine Zuordnung von Quaternionen z *zu geraden Linien* $\mathfrak{Z}$, *die eindeutig umkehrbar ist, soweit* $N(z)$ *und* $\mathfrak{Z}_{23}$ *von Null verschieden sind.*

Dem akzessorischen Gebiete des Möbiusschen Kontinuums entspricht in dieser Abbildung der Sekantenkomplex einer quasi-reellen Geraden, nämlich der Komplex $\mathfrak{Z}_{23} = 0$.[64])

Die Gleichungen [10] zeigen nunmehr, was im Raume der projektiven Geometrie das Bild der Transformation

$$\boxed{\tilde{z} = z'}$$

ist. Es ist eine involutorische und reelle projektive Transformation, die in Linienkoordinaten dargestellt werden kann als reelle lineare Transformation von der Determinante -1,

$$[17] \qquad \begin{aligned} \mathfrak{Z}_{01} &= \mathfrak{Z}'_{01}, & -\mathfrak{Z}_{02} &= \mathfrak{Z}'_{02}, & -\mathfrak{Z}_{12} &= \mathfrak{Z}'_{03}, \\ \mathfrak{Z}_{23} &= \mathfrak{Z}'_{23}, & -\mathfrak{Z}_{31} &= \mathfrak{Z}'_{31}, & -\mathfrak{Z}_{03} &= \mathfrak{Z}'_{12}; \end{aligned}$$

also ist es eine Korrelation, deren Ausdruck in Punkt- und Ebenenkoordinaten leicht gefunden wird:

$$[18] \qquad \boxed{\begin{aligned} \pm \mathfrak{z}_3 &= \mathfrak{w}'_0, & \mp \mathfrak{z}_2 &= \mathfrak{w}'_1, & \mp \mathfrak{z}_1 &= \mathfrak{w}'_2, & \pm \mathfrak{z}_0 &= \mathfrak{w}'_3, \\ \pm \mathfrak{w}_3 &= \mathfrak{z}'_0, & \mp \mathfrak{w}_2 &= \mathfrak{z}'_1, & \mp \mathfrak{w}_1 &= \mathfrak{z}'_2, & \pm \mathfrak{w}_0 &= \mathfrak{z}'_3. \end{aligned}}$$

Wählen wir die oberen Zeichen und setzen wir diese Transformation zusammen mit den zuvor gefundenen linearen Transformationen, so erhalten wir die Zuordnungen [13] und [14]; und zwar entspricht nunmehr allgemein dem Produkt von zwei Transformationen oder Formen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ das Produkt der zugeordneten Transformationen oder Formen $\mathfrak{A}_*$, $\mathfrak{B}_*$.

Nunmehr werde die Voraussetzung eingeführt, daß die sämtlichen betrachteten Quaternionen reell sind.

Dann genügen die Koordinaten $\mathfrak{Z}_{ik}$ der Formeln [10] den Gleichungen [9], wir erhalten ∞^4 gerade Linien — die Inzidenzlinien der involutorischen Antikollineation [8] — auf deren Kontinuum nunmehr die reellen Punkte des Möbiusschen Kontinuums *durchweg* eindeutig und stetig abgebildet sind. Ferner werden alle gefundenen Kollineationen und Korrelationen mit jener Antikollineation vertauschbar, sie werden in bezug auf sie *quasi-reell*. Aber auch umgekehrt wird man leicht alle Kollineationen und Korrelationen dieser Art bestimmen. Zum Beispiel wird eine in Punktkoordinaten dargestellte quasi-reelle Kollineation T_* erschöpfend durch die zwischen den Transformationskoeffizienten stattfindenden Gleichungen

$$[19] \qquad \bar{a}_{22} = a_{11}, \qquad \bar{a}_{21} = -a_{12} \qquad \text{usw.}$$

[64]) Natürlich unter Ausschluß von dieser Geraden selbst.

gekennzeichnet. Es findet sich also, und zwar unabhängig von der vorhergehenden Untersuchung, daß diese Transformationen ein Kontinuum, eine Gruppe mit 15 wesentlichen Parametern bilden.

Hiermit ist der aufgestellte Satz vollständig bewiesen.

Insbesondere ergibt sich noch:

Bilder der Inversionen im Möbiusschen Kontinuum sind projektive Spiegelungen an linearen Linienkomplexen (nicht-singuläre Nullsysteme).

Bilder der Spiegelungen an Kreisen im Möbiusschen Kontinuum sind projektive Spiegelungen an Flächen zweiter Ordnung (nicht-singuläre Polarsysteme).

Bilder der Involutionen sind kollineare Spiegelungen an Paaren von Geraden.

Man wird sich ohne weiteres klarmachen, was bei quasi-reellen Transformationen derart die Unterscheidung *real — ideal* zu bedeuten hat. Zum Beispiel entspricht der Quaternionentransformation $\tilde{z} = z'$ die Spiegelung an einer Fläche zweiter Ordnung, von deren beiden Scharen von Erzeugenden die eine „ideal", die andere (quasi-) „real" ist, d. h. einen aus ∞^1 Inzidenzlinien der ausgezeichneten Antikollineation bestehenden Zug hat. Sehr leicht wird man nun auch die (imaginären) Spiegelungen an Paaren von Ebenen der M_4^2 in R_5 ohne Gebrauch überflüssiger Parameter darstellen.

Gehen wir unsere Beweisgründe nochmals durch, so sehen wir, daß sie in Wirklichkeit noch mehr liefern, als was bis jetzt behauptet worden ist: Wir haben auch eine Zuordnung von bilinearen und quasi-bilinearen Formen von Quaternionen und von gewöhnlichen quaternären bilinearen Formen gefunden und diese ist ganz unabhängig davon, ob die Nablafunktionen jener Formen und die Determinanten von diesen Formen von Null verschieden sind oder nicht. Wir haben also vor uns auch eine Zuordnung von zweimal vier Arten bilinearer Formen,

$$T, \quad \mathsf{T}, \quad \Sigma, \quad S$$
$$T_*, \quad \mathsf{T}_*, \quad \Sigma_*, \quad S_*,$$

und diese Zuordnug ist — wie eine leichte Rechnung zeigt — nicht nur so beschaffen, daß Produkte entsprechender Faktoren einander entsprechen, sondern auch so, daß

$$[20] \quad \boxed{('T)_* = (T_*)', \quad ('\mathsf{T})_* = (\mathsf{T}_*)', \quad ('\Sigma)_* = (\Sigma_*)', \quad ('S)_* = (S_*)'}$$

wird. *Die in § 7 erklärten Rechnungen mit bilinearen und quasi-bilinearen*

Formen von Quaternionen laufen parallel den üblichen Rechnungen mit quaternären bilinearen Formen[65]).

Zum Beispiel zieht jede der Gleichungen

$$\Sigma - {}'\Sigma = 0, \qquad \Sigma + {}'\Sigma = 0$$

die entsprechende Gleichung

$$\Sigma_* - \Sigma'_* = 0, \qquad \Sigma_* + \Sigma'_* = 0$$

nach sich.

So kann die in § 8 geführte Untersuchung über konforme automorphe Transformationen einer Sphäre auch als Übersetzung einer entsprechenden Untersuchung über automorphe Kollineationen eines linearen Linienkomplexes oder Nullsystems dargestellt werden.

Zur richtigen Auffassung des Vorgetragenen diene schließlich noch ein Satz verneinenden Inhalts:

Erweitert man die Gruppe $\mathfrak{G}_{16}$, $\mathfrak{H}_{16}$ *durch Zufügung des ihr entsprechenden Konjugiums* $\bar{x}_k = x'$, $\bar{u}_k = u'$ $(k = 1, 2)$, *so kann die so entstehende umfassendere Gruppe nicht mehr holomorph auf die analoge Erweiterung der Gruppe der linearen Transformationen eines quaternären Gebietes bezogen werden.*

Gäbe es nämlich eine solche holomorphe Zuordnung der beiden genannten Gruppen, so müßte dem Konjugium der ersten Gruppe in der zweiten eine *involutorische* antilineare Transformation entsprechen, und diese müßte, nach Nr. [8], in die Form

$$\varrho\bar{\mathfrak{x}}_1 = \mathfrak{x}'_1, \qquad -\varrho\bar{\mathfrak{x}}_0 = \mathfrak{x}'_1, \qquad \varrho\bar{\mathfrak{x}}_3 = \mathfrak{x}'_2, \qquad -\varrho\bar{\mathfrak{x}}_2 = \mathfrak{x}'_3$$

(usw.) gesetzt werden können. Das symbolische Quadrat dieser Transformation ist nun aber

$$-\varrho\bar{\varrho}\cdot\mathfrak{x}_k = \mathfrak{x}'_k, \qquad -\varrho\bar{\varrho}\cdot\mathfrak{u}_k = \mathfrak{u}'_k \qquad (k = 0, 1, 2, 3),$$

also im günstigsten Falle (nämlich dann, wenn $\varrho\bar{\varrho} = 1$ ist) eine periodische Transformation von der Periode 4.

Daher haben die doppelten Vorzeichen in der Formel [8] und die in der Formel [18] eine ganz verschiedene Bedeutung.

---

[65]) Wenn

$$T_* = \Sigma\mathfrak{x}_i c_{ik}\mathfrak{v}_k, \text{ dann } T'_* = \Sigma\mathfrak{u}_i c_{ki}\mathfrak{y}_k,$$
$$\mathsf{T}_* = \Sigma\mathfrak{u}_i c_{ik}\mathfrak{y}_k, \text{ dann } \mathsf{T}'_* = \Sigma\mathfrak{x}_i c_{ki}\mathfrak{v}_k,$$
$$S^* = \Sigma\mathfrak{x}_i c_{ik}\mathfrak{y}_k, \text{ dann } S'_* = \Sigma\mathfrak{x}_i c_{ki}\mathfrak{y}_k,$$
$$\Sigma^* = \Sigma\mathfrak{u}_i c_{ik}\mathfrak{v}_k, \text{ dann } \Sigma'_* = \Sigma\mathfrak{u}_i c_{ki}\mathfrak{v}_k.$$

Man beachte die Bezeichnung der Veränderlichen, die die verschiedenartige Verwendung dieser Formen zum Ausdruck bringt.

Im zweiten Fall konnten wir unter ihnen eine Wahl treffen und dadurch eine lineare Transformation erhalten, die durch Zusammensetzung mit den Transformationen T_*, T_* ein erweitertes System T_*, T_*, Σ_*, S_* lieferte, das, auch in bezug auf die symbolische Multiplikation, dem System der Formen T, T, Σ, S *eindeutig* entsprach (Nr. 11 bis 14).[66]) Im ersten Falle aber ist Analoges nicht möglich. Es ist aber etwas anderes möglich, wovon im nächsten Paragraphen die Rede sein soll.

Natürlich wird man in ähnlicher Weise untersuchen können, was nun reellen Kollineationen und Korrelationen im Möbiusschen Kontinuum entspricht. Oder man wird, statt mit der projektiven Geometrie, die Theorie der konformen Transformationen in M_4 mit der Geometrie der Lieschen Transformationen orientierter Kugeln in Verbindung bringen können.

§ 12.

Die projektiven Gruppen $\mathfrak{G}_{16}$, $\mathfrak{H}_{16}$ und $\mathfrak{G}_{16}^*$, $\mathfrak{H}_{16}^*$.

Natürlich wird auch unsere Gruppe $\mathfrak{G}_{16}$, $\mathfrak{H}_{16}$ gepaarter Quaternionentransformationen, also die Gruppe

[21]

$$(T):\quad \begin{aligned} a x_1 + b x_2 &= x_1', \\ c x_1 + d x_2 &= x_2', \end{aligned} \qquad (\mathsf{T}):\quad \begin{aligned} u_1\alpha + u_2\beta &= u_1', \\ u_1\gamma + u_2\delta &= u_2', \end{aligned}$$

$$(\Sigma):\quad \begin{aligned} l\tilde{u}_1 + m\tilde{u}_2 &= x_1', \\ n\tilde{u}_1 + r\tilde{u}_2 &= x_2', \end{aligned} \qquad (S):\quad \begin{aligned} \tilde{x}_1\lambda + \tilde{x}_2\mu &= u_1' \\ \tilde{x}_1\nu + \tilde{x}_2\varrho &= u_2' \end{aligned}$$

verschwisterter Transformationen $\mathfrak{T} = (T, \mathsf{T})$ und $\mathfrak{S} = (\Sigma, S)$ in der projektiven Geometrie ein Seitenstück haben, es wird Gruppen $\mathfrak{G}_{16}^*$, $\mathfrak{H}_{16}^*$ geben, die zu der Gruppe $\mathfrak{G}_{16}$, $\mathfrak{H}_{16}$ eine ganz ähnliche Beziehung haben wie unsere Gruppe Γ_{15} H_{15} zur Gruppe der Kollineationen und Korrelationen eines Raumes von drei komplexen Dimensionen. Die Raumelemente und Transformationen dieser neuen Gruppen werden wiederum gepaart (paarweise kontragredient) sein.

Die Gleichungen einer solchen zu der Gruppe $\mathfrak{G}_{16}$, $\mathfrak{H}_{16}$ *holomorphen* Gruppe $\mathfrak{G}_{16}^*$, $\mathfrak{H}_{16}^*$ lassen sich ohne weiteres hinschreiben. Man hat nämlich nur auf sämtliche in den Formeln [21] vorkommenden Quaternionen die Regel [1] anzuwenden, die zur Bequemlichkeit des Lesers hier wiederholt werden mag:

$$\begin{aligned} z_0 + i z_3 &= z_{11}, & i z_1 - z_2 &= z_{12}, \\ i z_1 + z_2 &= z_{21}, & z_0 - i z_3 &= z_{22}, \end{aligned}$$

---

[66]) Auch die andere Wahl, also die Ersetzung von Σ_* und S_* durch $-\Sigma_*$ und $-S_*$, würde diese Wirkung gehabt haben. Beide Möglichkeiten sind gruppentheoretisch *gleichberechtigt*.

zusammengefaßt als

$$[22] \qquad z \sim \begin{pmatrix} z_{11}, & z_{12} \\ z_{21}, & z_{22} \end{pmatrix}.$$

Hieraus ergeben sich die weiteren Zuordnungen

$$[23] \qquad \tilde{z} \sim \begin{pmatrix} z_{22}, & -z_{12} \\ -z_{21}, & z_{11} \end{pmatrix}, \qquad \bar{z} \sim \begin{pmatrix} \bar{z}_{22}, & -\bar{z}_{21} \\ -\bar{z}_{12}, & \bar{z}_{11} \end{pmatrix}^{67})$$

und

$$a \sim \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{usw.}$$

Es kommt nun aber hier vieles, um nicht zu sagen alles, auf eine sachgemäße Wahl der Zeichen an — und diese liegt keineswegs auf der Hand. Wählt man nämlich die für die Veränderlichen des zu betrachtenden Raumes $\mathfrak{R}_8^*$ bestimmten Zeichen auch nur einigermaßen aufs Geratewohl, so erhält man nicht nur verwirrende Formelbilder, die schwer zu deuten sind, sondern es kann obendrein auch noch der Anschein entstehen, daß man sich mit der bisher entwickelten Theorie in flagrantem Widerspruch befindet[68]).

Ich stelle nun die durch das Vorhergehende fast eindeutig (*in allem Wesentlichen eindeutig*) bestimmten Zuordnungen zusammen, durch die die Gruppe $\mathfrak{G}_{16}$, $\mathfrak{H}_{16}$ in eine mit ihr nicht reell-kollineare Gruppe $\mathfrak{G}_{16}^*$, $\mathfrak{H}_{16}^*$ übergeführt werden soll. Ein dabei einzuführendes neues System von Ver-

---

[67]) $\bar{z}$ ist die von $\tilde{z} = (z_0, -z_1, -z_2, -z_3)$ wohl zu unterscheidende Quaternion, deren Koordinaten zu denen von $z = (z_0, z_1, z_2, z_3)$ konjugiert-komplex sind, $\bar{z} = (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$. Es ist also $\bar{\tilde{z}} = (\bar{z}_0, -\bar{z}_1, -\bar{z}_2, -\bar{z}_3)$.

[68]) Schon eine anscheinend so völlig bedeutungslose Abweichung wie etwa die Vertauschung der Horizontalreihen in den Formeln für u_1 und u_2 ist geeignet, wesentliche Eigenschaften des im Texte folgenden Formelsystems [24], [25] zu verdecken und namentlich zerstört sie bereits den einfachen Zusammenhang der Gruppe $\mathfrak{G}_{16}^*$, $\mathfrak{H}_{16}^*$ mit der durch die Formenpaare T, T und Σ, S dargestellten Gruppe $\mathfrak{G}_{16}$, $\mathfrak{H}_{16}$.

In der vorliegenden Untersuchung ist die Wahl solcher Zeichen, die ein möglichst klares Bild des vorliegenden, immerhin nicht ganz einfachen Sachverhalts geben, zugleich aber auch einer historischen Überlieferung, nämlich der üblich gewordenen Schreibart $\frac{az+b}{cz+d} = z'$ gewöhnlicher linearer Transformationen Rechnung tragen sollten, geradezu das Schwierigste gewesen, und namentlich haben die Formeln [24] [25] erst nach vielem Hin- und Herprobieren ihre endgültige Gestalt erlangt. Ich halte eine solche persönliche Bemerkung für nützlich, denn nicht gering ist die Zahl der Mathematiker, die die Wahl ihrer Zeichen so ziemlich dem Zufall überlassen. Die Kraftvergeudung, die daraus folgt, daß in so vielen Fällen beinahe jeder Autor andere Zeichen benutzt, ist vielleicht noch nicht einmal die schlimmste Wirkung hiervon. Jede unbedachte Wahl der Zeichen enthält den Keim einer künftigen Verwirrung.

nderlichen wird von den bisher gebrauchten Veränderlichen durch den Zusatz von Punkten unterschieden. Außerdem sind hier die bisherigen Veränderlichen auch noch durch den Druck hervorgehoben. So hoffe ich rreicht zu haben, daß die folgenden Formeln einigermaßen bequem gesen und in Rechnungen leicht gehandhabt werden können.

24]

$$x_1 \sim \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_0, & \dot{\mathfrak{x}}_0 \\ \mathfrak{x}_1, & \dot{\mathfrak{x}}_1 \end{pmatrix}, \qquad x_2 \sim \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_2, & \dot{\mathfrak{x}}_2 \\ \mathfrak{x}_3, & \dot{\mathfrak{x}}_3 \end{pmatrix},$$

$$u_1 \sim \begin{pmatrix} \mathfrak{u}_2, & \dot{\mathfrak{u}}_3 \\ \mathfrak{u}_2, & \dot{\mathfrak{u}}_3 \end{pmatrix}, \qquad -u_2 \sim \begin{pmatrix} \mathfrak{u}_0, & \dot{\mathfrak{u}}_1 \\ \mathfrak{u}_0, & \dot{\mathfrak{u}}_1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{x}_1 \sim \begin{pmatrix} \dot{\mathfrak{x}}_1, & -\mathfrak{x}_0 \\ -\mathfrak{x}_1, & \dot{\mathfrak{x}}_0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{x}_2 \sim \begin{pmatrix} \dot{\mathfrak{x}}_3, & -\mathfrak{x}_2 \\ -\mathfrak{x}_3, & \dot{\mathfrak{x}}_2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{u}_1 \sim \begin{pmatrix} \mathfrak{u}_3, & -\dot{\mathfrak{u}}_3 \\ -\mathfrak{u}_2, & \dot{\mathfrak{u}}_2 \end{pmatrix}, \qquad -\tilde{u}_2 \sim \begin{pmatrix} \mathfrak{u}_1, & -\dot{\mathfrak{u}}_1 \\ -\mathfrak{u}_0, & \dot{\mathfrak{u}}_0 \end{pmatrix}.$$

Macht man gleichartige Substitutionen für die mit y und v bezeichneten Quaternionen, und ferner auch für die akzentuierten Quaternionen, so erhält man — nun auf sehr viel kürzerem Wege — nochmals die Formeln [11] bis [14], nur *jede zweimal gesetzt*. Wir haben damit die Gruppe $\mathfrak{G}_{16}^{*}, \mathfrak{H}_{16}^{*}$. Die Zuordnung [22] liefert uns — nach Nr. [23] — aber auch das Seitenstück zu der Erweiterung unserer Gruppe $\mathfrak{G}_{16}, \mathfrak{H}_{16}$, die entsteht, wenn man noch das „Konjugium" des Raumes $\mathfrak{R}_8$,

$$\bar{x}_1 = x_1', \quad \bar{x}_2 = x_2'; \qquad \bar{u}_1 = u_1', \quad \bar{u}_2 = u_2'$$

hinzunimmt. Man hat nur die weiteren Substitutionen zu machen:

25]

$$\bar{x}_1 \sim \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{x}}_1, & -\bar{\mathfrak{x}}_1 \\ -\bar{\mathfrak{x}}_0, & \bar{\mathfrak{x}}_0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{x}_2 \sim \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{x}}_3, & -\bar{\mathfrak{x}}_3 \\ -\bar{\mathfrak{x}}_2, & \bar{\mathfrak{x}}_2 \end{pmatrix},$$

$$\bar{u}_1 \sim \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{u}}_3, & -\bar{\mathfrak{u}}_2 \\ -\bar{\mathfrak{u}}_3, & \bar{\mathfrak{u}}_2 \end{pmatrix}, \qquad -\bar{u}_2 \sim \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{u}}_1, & -\bar{\mathfrak{u}}_0 \\ -\mathfrak{u}_1, & \mathfrak{u}_0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\bar{x}}_1 \sim \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{x}}_0, & \bar{\mathfrak{x}}_1 \\ \bar{\mathfrak{x}}_0, & \bar{\mathfrak{x}}_1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\bar{x}}_2 \sim \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{x}}_2, & \bar{\mathfrak{x}}_3 \\ \bar{\mathfrak{x}}_2, & \bar{\mathfrak{x}}_3 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\bar{u}}_1 \sim \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{u}}_2, & \bar{\mathfrak{u}}_2 \\ \bar{\mathfrak{u}}_3, & \bar{\mathfrak{u}}_3 \end{pmatrix}, \qquad -\tilde{\bar{u}}_2 \sim \begin{pmatrix} \mathfrak{u}_0, & \bar{\mathfrak{u}}_0 \\ \mathfrak{u}_1, & \bar{\mathfrak{u}}_1 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen also, daß von den Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_{16}^*$, $\mathfrak{H}_{16}^*$ die Veränderlichen $\mathfrak{x}_k, \mathfrak{u}_k$ nur untereinander vertauscht werden, und ebenso die Veränderlichen $\dot{\mathfrak{x}}_k, \dot{\mathfrak{u}}_k$, daß aber die bei der Erweiterung hinzukommenden Transformationen beide Reihen von Veränderlichen miteinander vertauschen. In der Zuordnung [25] kann natürlich dem Konjugium des Raumes $\mathfrak{R}_8$ nicht eine Antikollineation zweiter Art entsprechen — die es im projektiven Kontinuum $\mathfrak{R}_8^*$ gar nicht gibt. Wir erhalten vielmehr als zugeordnet dem Konjugium $\bar{x}_{1k} = x'_{1k}$, $\bar{u}_{2k} = u'_{2k}$ hier eine zum Konjugium selbst kollineare Transformation, wie es die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} x_{10} + i x_{13} &= \mathfrak{x}_0, & i x_{11} - x_{12} &= \mathfrak{x}_0, \\ i x_{11} + x_{12} &= \mathfrak{x}_1, & x_{10} - i x_{13} &= \mathfrak{x}_1, \\ x_{20} + i x_{23} &= \mathfrak{x}_2, & i x_{21} - x_{22} &= \mathfrak{x}_2, \\ i x_{21} + x_{22} &= \mathfrak{x}_3, & x_{20} - i x_{23} &= \mathfrak{x}_3 \end{aligned}$$

ja unmittelbar erkennen lassen.

Bei der Deutung unserer Formeln wollen wir uns auf die gepaarten Transformationen $(T, \mathsf{T}) = \mathfrak{T}$ beschränken und uns kurz fassen. Es mag genügen, nunmehr die Koordinaten $\mathfrak{x}_k, \mathfrak{u}_k$ als *homogene* Veränderliche zu betrachten. Wir erhalten so an Stelle der Gruppe $\mathfrak{G}_{16}^*$, $\mathfrak{H}_{16}^*$ eine zu ihr meromorphe Gruppe $\mathfrak{G}_{15}^*$, $\mathfrak{H}_{15}^*$, die dann wieder zu den Gruppen Γ_{15}, H_{15} und G_{15}, H_{15} holomorph ist.

Jede zu der Gruppe $\mathfrak{G}_{15}^*$ kollineare Gruppe, und also auch die Gruppe $\mathfrak{G}_{15}$, kann nun offenbar wie folgt konstruiert werden:

Man beziehe zwei völlig getrennte projektive Kontinua $\mathfrak{R}_3(\mathfrak{x}, \mathfrak{u})$ *und* $\mathfrak{R}_3(\dot{\mathfrak{x}}, \dot{\mathfrak{u}})$ *des Raumes* $\mathfrak{R}_7$ (*oder* $\mathfrak{R}_7^*$) *kollinear aufeinander, und verbinde entsprechende Punkte* $(\mathfrak{x} = \dot{\mathfrak{x}})$ *durch gerade Linien, und ebenso entsprechende Ebenen* $(\mathfrak{u} = \dot{\mathfrak{u}})$ *durch lineare Räume* $\mathfrak{R}_5$. *Es entstehen dann zwei zueinander korrelative und einander wechselweise bestimmende sogenannte Normalmannigfaltigkeiten, von denen die erste ein Punktort* $\mathfrak{M}$ *von vier komplexen Dimensionen* (*und der Ordnung* 4) *ist. Diese* $\mathfrak{M}$ *enthält zwei Scharen von „erzeugenden" linearen Mannigfaltigkeiten nämlich* $\infty^{2 \cdot 1}$ $\mathfrak{R}_3$, *zu denen die zuvor genannten gehören, und* $\infty^{2 \cdot 3}$ $\mathfrak{R}_1$. *Alle Erzeugenden der einen Schar sind durch die Erzeugenden der anderen Schar kollinear* (*im Falle der* $\mathfrak{R}_1$ *projektiv*) *aufeinander bezogen*[69]. *Werden die Erzeugenden einer jeden Schar in allgemeinster Weise kollinear* (*projektiv*) *vertauscht, so entsteht die Gruppe* $\mathfrak{G}_{18}$ *aller* $\infty^{2 \cdot 18}$ *automorphe*

[69]) Natürlich kann man diese ganze Figur auch so erzeugen, daß man vier gerade Linien, die durch keinen $\mathfrak{R}_0$ verbunden werden können, projektiv aufeinander bezieh

Kollineationen der $\mathfrak{M}_1^4$, eine Gruppe, die demnach zwei miteinander vertauschbare invariante Untergruppen, eine (einfache) $\mathfrak{G}_{15}$ und eine (einfache) $\mathfrak{G}_3$ enthält. Die Gruppe $\mathfrak{G}_{18}^*$ ist also (gleich Gruppen verwandter Struktur) ein Analogon von Gruppe $\mathfrak{G}_6$ einer nicht-singulären Fläche 2. Grades in $\mathfrak{R}_3$. Und zwar ist sie — wie wir sehen werden — ein Seitenstück zu der Gruppe automorpher Kollineationen einer *idealen* Fläche derart.

Tiefer führt uns in das Wesen der Sache der Inhalt des folgenden Satzes, der eines ausgeführten Beweises bedarf:

Die $\mathfrak{M}_1^4$ enthält $\infty^{2\cdot 4}$ (nicht-singuläre) Flächen 2. Grades, von deren $2\cdot\infty^{2\cdot 1}$ Geraden immer die eine Schar aus Erzeugenden der $\mathfrak{M}_4^4$ besteht, während die Geraden der anderen Schar auf die erzeugenden $\mathfrak{R}_3$ verteilt sind. Nur diese letzten werden mithin von der Gruppe $\mathfrak{G}_3$ untereinander vertauscht, durch eine sogenannte Schiebungsgruppe.

Die Mannigfaltigkeit dieser Flächen, oder also der sie enthaltenden linearen Räume von drei komplexen Dimensionen, ist demnach eindeutig umkehrbar („projektiv") dem Plückerschen Kontinuum oder auch dem Möbiusschen Kontinuum M_4 zugeordnet.

Die zuletzt genannten $\mathfrak{R}_3$ bleiben somit bei der $\mathfrak{G}_3$ alle in Ruhe, und von der Gruppe $\mathfrak{G}_{15}$ werden sie transitiv untereinander vertauscht. Zugleich erweist sich diese zweite Gruppe nicht nur als imprimitiv, sondern auch als systatisch. Durch jeden Punkt des Raumes $\mathfrak{R}_7$, der nicht auf der $\mathfrak{M}_4^4$ liegt, geht nämlich ein einziger jener linearen Räume, und es bleiben bei den Transformationen von $\mathfrak{G}_{15}$ nicht nur alle Punkte jedes solchen Raumes auf die gleiche Art verbunden, sondern es genügt auch die Festhaltung eines einzigen nicht auf der $\mathfrak{M}_4^4$ gelegenen Punktes eines solchen Raumes $\mathfrak{R}_3$, um alle übrigen Punkte dieses $\mathfrak{R}_3$ festzuhalten.

In derselben Beziehung, wie zu den auf ihm gelegenen Punkten steht jeder solcher Raum zu den ihn enthaltenden $\mathfrak{R}_6$. Die $\mathfrak{M}_4^4$ wird dann durch die mit ihm verbundene reziproke Figur (Ort von $\mathfrak{R}_6$, $\mathfrak{R}_5$ und $\mathfrak{R}_3$) vertreten.

Der hiermit in Worten beschriebene Sachverhalt stellt sich in Formeln auf verschiedene Weise dar, je nachdem man sich der Quaternionenrechnung oder gewöhnlicher Koordinaten (die hier $\underset{\cdot}{x}_k$, $\underset{\cdot}{\underset{\cdot}{x}}_k$ und u_k, $\underset{\cdot}{u}_k$ heißen) bedient. So werden die Punkte der $\mathfrak{M}_4^4$ durch ein System von sechs linearunabhängigen quadratischen Gleichungen gekennzeichnet, die ebensowohl in der Form

26, 1] $\quad x_1\tilde{x}_1 = 0, \qquad x_1\tilde{x}_2 = 0, \qquad x_2\tilde{x}_2 = 0$

geschrieben als auch dadurch zusammengefaßt werden können, daß man die sämtlichen zweireihigen Determinanten der Matrix

$$[27, 1] \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_0 & \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{x}_3 \\ \dot{\mathfrak{x}}_0 & \dot{\mathfrak{x}}_1 & \dot{\mathfrak{x}}_2 & \dot{\mathfrak{x}}_3 \end{pmatrix}$$

gleich Null setzt. Ebenso läßt sich die zu der $\mathfrak{M}_4^4$ reziproke Figur (Ort von Räumen $\mathfrak{R}_6$) kennzeichnen mit Hilfe der Gleichungen

$$[26, \mathrm{r}] \qquad \boxed{\tilde{u}_1 u_1 = 0, \quad \tilde{u}_1 u_2 = 0, \quad \tilde{u}_2 u_2 = 0}$$

oder mit Hilfe der Matrix

$$[27, \mathrm{r}] \qquad \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \dot{u}_0 & \dot{u}_1 & \dot{u}_2 & \dot{u}_3 \end{pmatrix}.$$

In jedem Falle aber kann mit Hilfe der Zuordnungen [24] und [25] die Übersetzung aus der einen Formelsprache in die andere mechanisch vorgenommen werden.

In Quaternionenzeichen wird die Gruppe $\mathfrak{G}_3$ in Punkt- und $\mathfrak{R}_6$-Koordinaten dargestellt durch Gleichungen der Form

$$[28] \qquad \boxed{\begin{aligned} x_1 q &= y_1, & \tilde{q} u_1 &= v_1, \\ x_2 q &= y_2, & \tilde{q} u_2 &= v_2. \end{aligned}} \qquad \{Nq \neq 0\}.$$

(Vgl. Nr. [33].) Man sieht diesen Transformationen an, daß sie mit denen der Gruppe $\mathfrak{G}_{15}$ vertauschbar sind. Bedeuten dann die acht Verhältnisgrößen $x_{1i} : x_{2k}$ einen nicht auf der $\mathfrak{M}_4^4$ gelegenen Punkt, so liefern, bei Änderung von q, die Gleichungen [28] alle wiederum nicht auf $\mathfrak{M}_4^4$ gelegenen Punkte $y_{1i} : y_{2k}$, die mit dem ersten Punkt, wie wir kurz sagen dürfen, *systatisch verbunden* sind[70]). Nach Vertauschung der Punkte mit linearen Räumen $\mathfrak{R}_6$ gilt Entsprechendes von den Gleichungen rechts in Nr. [28]. Ferner erhält man bei Übergang zur Grenze $Nq = 0$ oder also, nach Nr. [3], zur Grenze

$$[29] \qquad \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^2, & q_1 q_2 \\ q_2 q_1, & q_2^2 \end{pmatrix}$$

auch noch sämtliche Punkte eines solchen von Punkten $y_{1i} : y_{2k}$ beschriebenen $\mathfrak{R}_3$, die auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4^4$ enthalten sind. Diese Punkte

[70]) Liegt der gegebene Punkt auf $\mathfrak{M}_4^4$, so ist er ebenfalls mit anderen Punkten der Gruppe $\mathfrak{G}_{15}$ systatisch verbunden. Diese Punkte werden auch dann noch durch die Formeln (28) geliefert. Sie erfüllen aber nur eine Gerade, nämlich die Erzeugende von $\mathfrak{M}_4^4$, die den gegebenen Punkt enthält. (Vgl. Nr. [26], [27].)

rfüllen die Fläche 2. Ordnung, von der in unserem zweiten Satze die Rede war. *Ferner folgt, daß man bei unbeschränkter Veränderlichkeit von q aus* [28] *alle Punkte* $(\mathfrak{R}_0)$ *und alle* $\mathfrak{R}_6$ *desselben* $\mathfrak{R}_3$ *erhält.* Ersetzt man nämlich in den Gleichungen [28] die eine Transformation (q) er Gruppe $\mathfrak{G}_3$ durch zwei verschiedene Transformationen (q_l, q_r), stellt man nämlich, unter Änderung der Bezeichnung, die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 q_l &= y_1, & \tilde{q}_r u_1 &= v_1, \\ x_2 q_l &= y_2, & \tilde{q}_r u_2 &= v_2 \end{aligned} \tag{30}$$

uf, so folgt zunächst, daß, immer dann, wenn $Nq_l \neq 0$, $Nq_r \neq 0$ ist, ede einzelne der Gleichungen (oder vielmehr jedes der Gleichungssysteme)

$$\begin{aligned} u_1 x_1 - u_2 x_2 &= 0, & u_1 y_1 - u_2 y_2 &= 0, \\ v_1 x_1 - v_2 x_2 &= 0, & v_1 y_1 - v_2 y_2 &= 0 \end{aligned} \tag{31}$$

ie drei übrigen nach sich zieht. Die erste dieser symbolischen Gleichungen ber ist nach [24] gleichbedeutend mit dem System

$$\begin{aligned} (\mathfrak{u}\mathfrak{x}) &= 0, & (\mathfrak{u}\dot{\mathfrak{x}}) &= 0, \\ (\dot{\mathfrak{u}}\mathfrak{x}) &= 0, & (\dot{\mathfrak{u}}\dot{\mathfrak{x}}) &= 0, \end{aligned} \tag{32}$$

lem zufolge der lineare $\mathfrak{R}_6$ $(\mathfrak{u} : \dot{\mathfrak{u}})$ vereinigt liegt mit dem $\mathfrak{R}_0$ oder Punkt $(\mathfrak{x} : \dot{\mathfrak{x}})$. Es liegen also die den Quaternionenpaaren (u_1, u_2), (v_1, v_2) zugeordneten linearen $\mathfrak{R}_6$ vereinigt mit den Punkten, die den Paaren (x_1, x_2), $y_1, y_2)$ entsprechen, und zwar *bei jeder beliebigen Wahl von q_l und q_r* — lso auch dann noch, wenn $Nq_l = 0$ oder $Nq_r = 0$ sein sollte. Das ganze durch die Gleichungen [30] (oder [31] usw.) ausgedrückte System von Abhängigkeiten aber ist, nach Nr. (136), invariant gegenüber Transformationen von $\mathfrak{G}_{15}$.

Schließlich können wir auch noch die durch unseren zweiten Lehrsatz gegebene Zuordnung der hier betrachteten $\infty^{2\cdot 4}$ linearen $\mathfrak{R}_3$ zu einzelnen Quaternionen z unmittelbar herstellen. Wir haben nur, nach [30], unter den Voraussetzungen $Nx_2 \neq 0$, $Nv_2 \neq 0$, $Nq_l \neq 0$, $Nq_r \neq 0$,

$$\boxed{\frac{x_1\,|}{|\,x_2} = \frac{y_1\,|}{|\,y_2} = z = \frac{|\,u_1}{u_2\,|} = \frac{|\,v_1}{v_2\,|}} \tag{33}$$

zu setzen, was wiederum ein gegenüber $\mathfrak{G}_{15}$ (und natürlich auch noch gegenüber $\mathfrak{G}_{18}$) invariantes System von Abhängigkeiten bedeutet. (Siehe Nr. 107.)

Hiermit ist alles bewiesen, was vom Inhalte unserer letzten Lehrsätze nicht von vornherein auf der Hand liegt, und noch etwas mehr.

Alles zuletzt Vorgetragene gilt allgemein, für das komplexe Gebiet. Wir können nun aber über die Realität der vorkommenden Größen verschiedene Annahmen machen. Was im Rahmen der gewöhnlichen projektiven Geometrie, wie sie namentlich von italienischen Mathematikern gepflegt worden ist, als das Nächstliegende erscheint, ist, die Veränderlichen x_k, ξ_k, u_k, v_k und dann auch die Transformationskoeffizienten a_{ik} auf *reelle* Werte einzuschränken. Man sieht, daß man dann eine von *reellen* $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_3$ beschriebene $\mathfrak{M}_4^4$ und eine zugehörige $\mathfrak{G}_{18}^*$ mit $2 \cdot 2$ reellen je ∞^1 Transformationen umfassenden Zügen erhält. In unserem Zusammenhang hat sich jedoch etwas anderes als nicht minder einfach und natürlich dargeboten. Die entsprechende Einschränkung besteht in der Forderung, daß die sämtlichen in den Gleichungen [21] vorkommenden *Quaternionen* reell sein sollen. Dann erhalten wir ebenfalls eine reelle Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4^4$, aber diese ist, nach unserer Terminologie, *ideal*: Sie enthält, wie die Gleichungen [26] es zeigen, keine reellen Punkte, und dann natürlich auch keine reellen Geraden und $\mathfrak{R}_3$. Die Mannigfaltigkeit jener anderen $\mathfrak{R}_3$ aber, deren Punkte nicht alle auf der $\mathfrak{M}_4^4$ liegen, hat einen aus ∞^4 Exemplaren bestehenden reellen Zug, der in der Hauptsache eindeutig dem Kontinuum der reellen Quaternionen entspricht (Nr. [33]). Die zugehörige Gruppe $\mathfrak{G}_{18}$ hat auch nur einen einzigen reellen Zug, ebenso wie ihre Untergruppen $\mathfrak{G}_3$ und $\mathfrak{G}_{15}$.

Hiermit ist die Einordnung des Vorgetragenen in die Systematik der projektiven Geometrie vollendet, und es hat damit die durchgeführte Untersuchung einen gewissen Abschluß erreicht.

Bonn, im August 1923.

(Eingegangen am 15. August 1923.)

Zur Darstellung total positiver Zahlen als Summen von vier Quadraten.

Von

Johannes Kirmse in Schmölln.

Im 11. Bande dieser Zeitschrift (S. 246—275) bewies Herr C. Siegel, ß sich jede total positive Zahl eines algebraischen Zahlkörpers K als adratsumme von vier Zahlen in K darstellen läßt. In Verbindung mit nigen Sätzen über algebraische Quaternionenkörper folgt hieraus, daß da- i im Falle eines nicht total imaginären Körpers K zur Darstellung der nzen Zahlen ein endlicher Nennervorrat in den Komponenten ausreicht.

§ 1.

Durchlaufen die Komponenten α_0, α_1, α_2, α_3 die Zahlen eines alge- aischen Körpers K vom Grade n, so bildet die Schar der Quaternionen

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3$$

nen Quaternionenkörper Q vom Range $4n$. Die Gesamtheit J_0 der Qua- rnionen mit ganzzahligen Komponenten in K ist nie ein umfassendster tegritätsbereich in Q, sondern es gibt in Q i. a. mehrere umfassendste tegritätsbereiche, die außer den Quaternionen von J_0 noch Hälften von lchen enthalten.

Es werden die rechts- (und links-) seitigen Ideale in J_0 betrachtet[1]). i jedem Ideal $\mathfrak{c}$ in K gehört ein eindeutig bestimmtes (zweiseitiges) eal $(\mathfrak{c})$ in J_0, das in J_0 durch dieselbe Basis erzeugt wird wie $\mathfrak{c}$ in K, d weiter gibt es zu jedem Ideal $\mathfrak{A}$ in J_0 ein eindeutig bestimmtes eal $\mathfrak{a}^*$ in K so, daß $\mathfrak{A}$ sowohl von $(\mathfrak{a}^*)$, nie aber von $(\mathfrak{a}^* \cdot b)$, $b \neq 1$ nfaßt wird. Die in $\mathfrak{A}$ vorkommenden Zahlen aus K bilden ein Ideal $\mathfrak{z}(\mathfrak{A})$

[1]) Die Idealtheorie ist zuerst von Hurwitz auf das Quaternionengebiet über- agen worden: Gött. Ber. 1896 und „Vorlesungen über die Zahlentheorie der Qua- rnionen", Berlin 1919 (Julius Springer).

in K. Das Produkt $\mathfrak{a}^* \mathfrak{z}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{n}(\mathfrak{A})$ heiße die „Relativnorm" von ($\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}$ heiße „primitiv", wenn $\mathfrak{a}^* = 1$ ist. Es stellt sich heraus, da die Relativnorm eines Hauptideals $(g]$ bzw. $[g)$ mit der „Relativnorm $N(g) = g\bar{g}$ des Basisquaternions identisch ist.

Den $N(\mathfrak{A}) = n_{\mathfrak{a}}^4$ Restklassen ($n_{\mathfrak{a}} =$ Norm von $\mathfrak{a}$ in K) modulo ein ungeraden Ideals $(\mathfrak{a})$ lassen sich die Substitutionenkongruenzen zuordne

$$\left.\begin{aligned} x_1' &\equiv \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2' &\equiv \gamma x_1 + \delta x_2 \end{aligned}\right\} \bmod \mathfrak{a}.$$

Mit Hilfe dieses Kunstgriffes ergeben sich nach dem Vorgange von Hurwit die Sätze:

Es gibt $\psi(\mathfrak{a}) = n_{\mathfrak{a}}^3 \prod \left(1 - \frac{1}{n_{\mathfrak{p}}^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n_{\mathfrak{p}}}\right)$, $\mathfrak{p} \to$ alle Primteiler von modulo $\mathfrak{a}$ primitive[2]) und inkongruente Quaternionen f mit $f\bar{f} \equiv 0 \bmod$ die noch so gewählt werden können, daß $f\bar{f} \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{a}b$ für alle $(\mathfrak{a}, b) +$ Ist f eines von diesen, so haben die Kongruenzen $xf \equiv 0$ und $fx \equiv$ $\bmod (\mathfrak{a})$ je $n^2(\mathfrak{a})$ Lösungen, worunter $n_{\mathfrak{a}}^2 \prod \left(1 - \frac{1}{n_{\mathfrak{p}}^2}\right)$ nach $\mathfrak{a}$ primitiv vorkommen.

Sollen zwei dieser Quaternionen, etwa f und f_1, mit $(\mathfrak{a})$ denselbe größten gemeinsamen rechtsseitigen Idealteiler $(\mathfrak{a}, f] = (\mathfrak{a}, f_1]$ haben, ist dazu notwendig $f\bar{f}_1 \equiv 0 \bmod (\mathfrak{a})$. Ist umgekehrt diese Bedingung e füllt und $f_1\bar{f}_1 = \mathfrak{a} \cdot b$, $(\mathfrak{a}, b) = 1$, so gibt es zwei Zahlen ϱ, α derart, da $(\varrho) = \mathfrak{a}^* b$, $(\alpha) = \mathfrak{a} b^*$ und $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^*) = (\mathfrak{a}, b^*) = 1$ ist, und es läßt sich noc erreichen, daß $\varrho \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}$ wird. Auch $\mathfrak{a}^* b^* = (\tau)$ ist dann Hauptidea Es folgt: $\tau f\bar{f}_1 \equiv 0 \bmod (\alpha)$; $\tau f\bar{f}_1 f_1 = f\varrho\alpha \equiv 0 \bmod (\alpha f_1]$; $f\varrho \equiv 0 \bmod (f$ und wegen $\varrho \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}$, daß $f \equiv 0 \bmod (\mathfrak{a}, f_1]$. Aus $f\bar{f}_1 \equiv 0 \bmod ($ folgt auch $f_1\bar{f} \equiv 0 \bmod (\mathfrak{a})$ und hieraus ganz entsprechend $f_1 \equiv 0 \bmod (\mathfrak{a}, f$ Zusammen mit dem zweiten der obigen Sätze ergibt sich also: $n_{\mathfrak{a}}^2 \prod \left(1 - \frac{1}{n_{\mathfrak{p}}^2}\right)$ jener $\psi(\mathfrak{a})$ Quaternionen f haben mit $\mathfrak{a}$ denselben größt gemeinsamen rechtsseitigen Idealteiler. Die so entstehenden $n_{\mathfrak{a}} \prod \left(1 + \frac{1}{n}\right.$ Ideale $(\mathfrak{a}, f_\nu] = \mathfrak{A}_\nu$ sind alle primitiv. Außerdem ist $\mathfrak{n}(\mathfrak{A}_\nu) = \mathfrak{z}(\mathfrak{A}_\nu) =$

Es ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{z}(\mathfrak{A}_\nu)\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{z}(\mathfrak{A}_\nu)$ durch alle Primteiler von $\mathfrak{a}$ teilba Ist also $\mathsf{A} = \mathfrak{z}(\mathfrak{A}_\nu)\mathfrak{q}$; $(\mathfrak{q}, \mathfrak{a}) = 1$ eine algebraische Zahl aus $\mathfrak{A}_\nu$, so i $\mathsf{A} = A + fg = fg \bmod (\mathfrak{a})$ und daher auch $fg \equiv 0 \bmod (\mathfrak{z}(\mathfrak{A}_\nu))$; g e Quaternion in J_0, A eines in $(\mathfrak{a})$. Da in dieser Kongruenz f durch al nach $\mathfrak{z}(\mathfrak{A}_\nu)$ kongruenten Quaternionen ersetzt werden kann, so ist $g\bar{g} \equiv$ $\bmod \mathfrak{z}(\mathfrak{A}_\nu)$, also $f\bar{f}g\bar{g} \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{z}(\mathfrak{A}_\nu)$. Wählt man jetzt zwei zu

[2]) Mit modulo $\mathfrak{a}$ teilerfremden Komponenten.

ime Ideale $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{a}_0$ von der Art, daß $\mathfrak{z}(\mathfrak{A}_\nu)\mathfrak{q} = (\alpha)$ und $\mathfrak{a}_0\mathfrak{q} = (\lambda)$ auptideale werden, so kommt die ganze algebraische Zahl α in $[\mathfrak{a}, f)$ r, d. h. es ist

$$\alpha = A + fg$$

nd daher $\alpha\lambda = A\lambda + fg\lambda$. Wegen $A\lambda \equiv 0 \mod (\mathfrak{z}(\mathfrak{A}_\nu)\mathfrak{a}_1\mathfrak{q})$ ist also uch $fg\lambda \equiv 0 \mod (\alpha)$, d. h. in der Darstellung $\lambda = \frac{A\lambda}{\alpha} + \frac{fg\lambda}{\alpha}$ sind beide ummanden Quaternionen in J_0. Überdies ist dabei noch $\frac{A\lambda}{\alpha} \equiv 0 \mod (\mathfrak{a}_1)$, so wegen $N(fg) \equiv 0 \mod \mathfrak{a}\mathfrak{z}(\mathfrak{A}_\nu)$ endlich $N\left(\frac{fg\lambda}{\alpha}\right) \equiv 0 \mod \mathfrak{a}_1$. Die chte Seite der Darstellung von λ ist also ein Quaternion von J_0 mit urch $\mathfrak{a}_1$ teilbarer Relativnorm, woraus zusammen mit der Konstruktion on λ folgt, daß $\mathfrak{a}_1 = 1$, d. h. $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}, f] = \mathfrak{n}(\mathfrak{A}_\nu) = \mathfrak{a}$ ist.

Es sei K nicht total imaginär. Jedem Quaternion a lassen sich mit ilfe der konjugierten Werte seiner Komponenten $4n$ reelle Koordinaten ξ_ϱ uordnen. Jedem Modul $\mathfrak{M}$ in J_0 entspricht dann ein Punktgitter des -Raumes mit dem Grundmascheninhalt

$$H = \frac{d^2}{2^{4s}} N(\mathfrak{M}).$$

ie Norm des durch a erzeugten Hauptideals ist

$$N(a) = n^2(a\bar{a}) = \prod_{\nu=1}^{n} |\alpha_0^{(\nu)2} + \alpha_1^{(\nu)2} + \alpha_2^{(\nu)2} + \alpha_3^{(\nu)2}|$$

$$\leqq \frac{1}{n^{2n}} \sum^{2n} \{|\alpha_0^{(\nu)}|^2 + |\alpha_1^{(\nu)}|^2 + |\alpha_2^{(\nu)}|^2 + |\alpha_3^{(\nu)}|^2\} = \left(\frac{S(\xi_\varrho)}{n}\right)^{2n}$$

as Volumen des $4n$-dimensionalen Ellipsoides $S(\xi_\varrho) \leqq M$ beträgt

$$\frac{(\pi M)^{2n}}{2^{4s}(2n)!}.$$ [3])

as Fundamentaltheorem Minkowskis über konvexe Bereiche mit Mittelunkt besagt daher: Es gibt in jedem Modul $\mathfrak{M}$ ein Quaternion $a \neq 0$ it $N(a) \leqq \frac{2^{4n}(2n)!}{\pi^{2n} n^{2n}} d^2 N(\mathfrak{M}) = k N(\mathfrak{M})$. [4])

Nun hat Herr Siegel bewiesen, daß sich jede total positive ganze ahl in K als Summe von vier Quadraten darstellen läßt. In Verbindung it den obigen Tatsachen folgt dann weiter, daß in den nicht total imaginären Körpern hierzu nur ein endlicher Nennervorrat nötig ist:

Es sei ϱ eine total positive ganze Zahl in K und

$$(\varrho) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}, \qquad n_\mathfrak{a} = 2^\sigma; \qquad (\mathfrak{b}, 2) = 1.$$

[3]) s = Hälfte der Anzahl der imaginären Körper unter den konjugierten zu K.
[4]) d = Diskriminante von K.

Die Ideale $\mathfrak{a}^*$, $(b^*, 2) = 1$ und die Zahlen α^*, $(\beta^*, 2) = 1$ könn
aus je einem endlichen Vorrate so gewählt werden, daß

$$(\mathsf{A}) = \mathfrak{a}\mathfrak{a}^*\alpha^* \quad \text{und} \quad (\mathsf{B}) = b b^* \beta^*$$

Hauptideale und A und B total positive ganze Zahlen sind. Da B u
gerade ist, so gibt es Ideale $\mathfrak{B}$ in J_0 mit der Relativnorm B und dar
Quaternionen a mit

$$n^2(a\bar{a}) = k_a n_{\mathsf{B}}^2, \qquad k_a \leqq \frac{2^{4n}(2n)!}{\pi^{2n} n^{2n}} d^2 = k;$$

$a\bar{a}$ ist total positiv und durch B teilbar:

$$a\bar{a} = \tau \mathsf{B}.$$

Die ganze Zahl τ ist also ebenfalls total positiv, und wenn

$$\varrho = \frac{\mathsf{A}\gamma\tau}{\gamma^2\tau^2}\mathsf{B}\tau, \qquad (\gamma) = \alpha^*\beta^*\mathfrak{a}^* b^* \qquad (\gamma \succ 0$$

alle total positiven Zahlen in K durchläuft, so können die zugehörigen
so gewählt werden, daß die Gesamtheit der τ-Werte und damit auch d
Gesamtheit der Werte von $\frac{\mathsf{A}\gamma\tau}{\gamma^2\tau^2} = \lambda \succ 0$ eine endliche Menge bleibt[5]
$\mathsf{B}\tau$ ist als Quadratsumme von vier ganzen Zahlen in K darstellbar, de
Satze des Herrn Siegel zufolge auch jeder der Faktoren λ als Quadra
summe von vier eventuell gebrochenen Zahlen in K. Da aber die Gesam
zahl der benötigten Faktoren λ endlich ist, so gilt dasselbe für die G
samtzahl der Nenner, die zur Darstellung aller total positiven Zahl
in K als Summen von je vier Quadraten erforderlich sind.

§ 2.

Besonderes Interesse beanspruchen diejenigen Quaternionenkörper,
deren umfassendsten Integritätsbereichen alle Ideale Hauptideale sin
Unter den reellen quadratischen Körpern gibt es deren nur drei, nämli
die, welche durch Adjunktion von bzw. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$ zu dem von Hurwi
untersuchten Körper der Quaternionen mit rationalen Komponenten en
stehen.

Im Körper $Q(i_1, i_2, \sqrt{2})$ gibt es vier (zueinander isomorphe) u
fassendste Integritätsbereiche über J_0:

$$J_{\sqrt{2}} = \Big[J_0, \tfrac{1}{2}(1+i_1+i_2+i_3), \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i_1+i_2+i_3), \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i_1), \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i_2$$

und

$$p_\nu J p_\nu^{-1}; \qquad p_\nu = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3$$

[5]) A kann durch Abspaltung von Faktoren $\mathfrak{p}^{2h}$ ($\mathfrak{p}$ gerades Primideal, h d
Klassenzahl von K) ebenfalls auf einen endlichen Wertevorrat beschränkt werden.

In den Körpern $Q(i_1, i_2, \sqrt{d})$, $d = 5, 13$ gibt es deren je zwei:

$$J_{\sqrt{d}} = \Big[J_0, \frac{1}{2}(1+i_1+i_2+i_3), \frac{1+\sqrt{d}}{2}(1+i_1+i_2+i_3),$$
$$\frac{1}{2}i_1+\frac{1+\sqrt{d}}{2}i_2+\frac{3+\sqrt{d}}{2}i_3, \frac{1+\sqrt{d}}{2}i_1+\frac{3+\sqrt{d}}{2}i_2+\frac{1}{2}i_3\Big]$$

nd den aus $J_{\sqrt{d}}$ durch Vertauschung von i_2 und i_3 hervorgehenden.

In diesen Integritätsbereichen reduziert sich der Wert der Konstanten es Hilfssatzes auf den 16. Teil; es gibt also in jedem Modul $\mathfrak{M}$ eines olchen Bereiches ein Quaternion mit

$$|n(a\bar{a})| \leqq k_d^* N(\mathfrak{M}),$$

obei

$$k_2^* < 3{,}98, \quad k_5^* < 2{,}49, \quad k_{13}^* < 6{,}46.$$

n $J_{\sqrt{2}}$ sind alle geraden Primideale Hauptideale:

$$p_1 = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i_1, \quad p_2 = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i_2, \quad p_3 = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i_3,$$

benso alle Primteiler von 3:

$$i_1 \pm i_2 \pm i_3; \quad 1 \pm \sqrt{2}\,i_1, \quad 1 \pm \sqrt{2}\,i_2, \quad 1 \pm \sqrt{2}\,i_3.$$

Ebenso sind in $J_{\sqrt{5}}$ und $J_{\sqrt{13}}$ alle geraden Primideale Hauptideale:

$$p_0 = 1+i_1, \quad p_\nu = \frac{1}{2} \pm \frac{3+\sqrt{5}}{4}i_1 \pm \frac{3-\sqrt{5}}{4}i_2 \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

zw.

$$p_0 = 1+i_1, \quad p_\nu = \frac{1}{2} \pm \frac{1-\sqrt{13}}{4}i_1 \pm \frac{1+\sqrt{13}}{4}i_2 \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

n $J_{\sqrt{13}}$ sind auch noch die acht s-seitigen Primteiler von $3 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{5-\sqrt{13}}{2}$:

$$q_\nu = \frac{1}{2} \pm \frac{1+\sqrt{13}}{4}i_1 \pm \frac{3+\sqrt{13}}{4}i_2; \quad q_\nu' = \frac{1}{2} \pm \frac{1-\sqrt{13}}{4}i_1 \pm \frac{3-\sqrt{13}}{4}i_2$$
$$(\nu = 1, 2, 3, 4);$$

nd die 26 s-seitigen Primteiler von 5

$$1 \pm 2i_1; \quad 1 \pm 2i_2; \quad 1 \pm 2i_3; \quad \frac{3}{2} \pm \frac{3+\sqrt{13}}{4}i_1 \pm \frac{3-\sqrt{13}}{4}i_2;$$
$$\frac{\sqrt{13}}{2} \pm \frac{1-\sqrt{13}}{4}i_1 \pm \frac{1+\sqrt{13}}{4}i_2; \quad \frac{1}{2} \pm \frac{5-\sqrt{13}}{4}i_1 \pm \frac{5+\sqrt{13}}{4}i_2;$$
$$\frac{1}{2} \pm \frac{5-\sqrt{13}}{4}i_2 \pm \frac{5+\sqrt{13}}{4}i_3; \quad \frac{1}{2} \pm \frac{5+\sqrt{13}}{4}i_1 \pm \frac{5-\sqrt{13}}{4}i_3$$

Hauptideale.

Es sei nun π eine Primzahl in $K(\sqrt{d})$, $d = 2, 5, 13$ und $\mathfrak{P} = [\pi, f)$ eines der aus π hervorgehenden linksseitigen Primideale in $J_{\sqrt{d}}$. Dann ist

$N(\mathfrak{P}) = \pi^2 = \pi_0^{2t}$, $t = 1, 2$, wobei π_0 die im Hauptideal (π) vorkommende natürliche Primzahl bedeutet. In $\mathfrak{P}$ gibt es ein Quaternion mit

$$N(q) = \delta \pi_0^{2t}, \quad \delta \leqq k^{*2}.$$

1. $t = 1$. $\quad N(\mathfrak{P}) = \pi_0^2, \quad (q\bar{q})(q\bar{q})' = \varrho_1 \pi_0, \quad \varrho_1^2 = \delta,$

also

$$q\bar{q} = \tau\pi, \quad \tau\tau' = \varrho_1 \leqq k^*.$$

2. $t = 2$. $\quad N(\mathfrak{P}) = \pi_0^4, \quad (q\bar{q})(q\bar{q})' = \varrho_1 \pi_0^2, \quad \varrho_1^2 = \delta,$

$$q\bar{q} = \tau\pi, \quad \tau\tau' = \varrho_1 \leqq k^*.$$

Das Ideal $\mathfrak{A}^* = [\pi, q)$ wird von $\mathfrak{P}$ umfaßt. Daher ist $N(\mathfrak{A}^*)$ durch π_0^{2t} teilbar. Andererseits ist $N(\mathfrak{A}^*)$ auch gemeinsamer Teiler von $N(\pi) = \pi_0^{4t}$ und $N(q) = (\tau\tau')^2 \pi_0^{2t}$. Ist also $\pi_0 > k^*$, so ist $[\pi, q) = [\pi, f)$. Ist dabei $N(q) > \pi_0^{2t}$, so ist $N(q)$ durch eine Zahl γ in $K(\sqrt{d})$ teilbar mit $\gamma\gamma' < k^*$. Daher ist das Ideal $(q]$ durch eines der rechtsseitigen Ideale in $J_{\sqrt{d}}$ mit der Relativnorm (γ) teilbar, und da diese sämtlich Hauptideale sind, so folgt (eventuell durch mehrfache Wiederholung dieses Schlusses), daß sich q in die Form setzen läßt

$$q = q^* g,$$

wobei g ein gewisses Quaternion in $J_{\sqrt{d}}$ und $N(q^*) = \pi_0^{2t}$ ist. Da das Ideal $[q^*, \pi) \neq 1$ das Primideal $\mathfrak{P} = [q, \pi)$ umfaßt, so muß also $[q^*, \pi) = \mathfrak{P}$ und wegen $N(q^*) = N(\mathfrak{P})$

$$[q^* = \mathfrak{P}$$

sein. Damit ist bewiesen, daß in den drei genannten Körpern auch noch die Primidealteiler aller natürlichen Primzahlen $\pi_0 > k^*$ Hauptideale sind, und hieraus fließt die Einsicht:

Ist $\alpha > 0$ eine ganze Zahl des Körpers $K(\sqrt{d})$, $d = 2, 5, 13$, so entspringen aus jedem umfassendsten Integritätsbereiche $J_{\sqrt{d}}$ genau

$$w_{\sqrt{d}} \sum n(\delta), \quad \delta \rightarrow \text{alle Idealteiler von } \alpha,$$

Darstellungen von α als Quadratsumme von Hälften ganzer Zahlen in $K(\sqrt{d})$. Dabei ist $w_{\sqrt{d}}$ die Anzahl der Quaternionen v in $J_{\sqrt{d}}$ mit $v\bar{v} = 1$, also $w_{\sqrt{2}} = 48$, $w_{\sqrt{5}} = 120$, $w_{\sqrt{13}} = 24$.

Die Gruppe der Primreste modulo 2 in $J_{\sqrt{d}}$ ist als Produkt von zwei Faktoren darstellbar, deren einer die durch die Quaternionen v repräsentierten Klassen umfaßt. Hieraus folgt noch:

1. Jede ungerade Zahl $\alpha > 0$ in $K(\sqrt{5})$ besitzt genau

$$8 \sum n(\delta), \quad \delta \rightarrow \text{alle Idealteiler von } \alpha,$$

Darstellungen als Quadratsumme von vier ganzen Zahlen in $K(\sqrt{5})$, unter denen gerade

$$8\, n_\alpha \prod \left(1+\frac{1}{n_\pi}\right), \quad \pi \to \text{alle Primidealteiler von } \alpha,$$

mit teilerfremden Komponenten vorkommen.

2. Die Gesamtzahl der Darstellungen einer beliebigen ungeraden Zahl $\alpha \succ 0$ des Körpers $K(\sqrt{2})$ als Quadratsumme von vier (echten oder unechten) Hälften von ganzen Zahlen in $K(\sqrt{2})$ beträgt

$$144 \sum n(\delta), \quad \delta \to \text{alle Idealteiler von } \alpha.$$

Der Beweis dafür, daß die Körper $Q(i_1, i_2, \sqrt{d})$, $d = 2, 5, 13$, die einzigen mit der angegebenen Eigenschaft sind, stützt sich darauf, daß für $d \geqq 17$ das Gleichungssystem

$$\sum_0^3 x_k^2 + \frac{d-1}{4} \sum_0^3 y_k^2 = 4\pi,$$

$$2 \sum_0^3 x_k y_k + \sum_0^3 y_k^2 = 0$$

für die Primzahlen $0 < \pi \leqq \frac{d-1}{8} + 1$ nur Lösungen mit $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ besitzt und daß in $J_{\sqrt{d}}$ nur dann alle Ideale Hauptideale sein können, wenn dasselbe für $K(\sqrt{d})$ zutrifft und wenn außerdem die Norm der Fundamentaleinheit von $K(\sqrt{d})$ negativ ist.

§ 3.

Es kann endlich der Fall eintreten, daß zwar nicht *alle* Ideale in $J_{\sqrt{d}}$ Hauptideale sind, daß aber alle solchen Ideale, welche eine durch eine total positive Zahl erzeugbare Relativnorm besitzen, Hauptideale sind. Eine triviale Überlegung lehrt, daß unter den reellen quadratischen Körpern nur der Körper $Q(i_1, i_2, \sqrt{3})$ diese Eigenschaft haben könnte. Sie kommt ihm aber tatsächlich auch zu:

Alle Ideale können nicht Hauptideale sein; denn die Norm der Fundamentaleinheit $\mathsf{E} = 2 + \sqrt{3}$ ist gleich $+1$.

Für den Körper $H(\sqrt{3})$ ist

$$k_3^* < 6.$$

Den früheren Überlegungen zufolge genügt es nachzuweisen, daß alle Ideale mit einer total positiven Relativnorm

$$\nu = \text{Teiler einer der Zahlen}$$
$$1,\ 2,\ 3,\ 5$$

Hauptideale sind. E ist selbstverständlich Hauptideal und

$$(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) = -2, \quad \sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3}) = -3, \quad 5 = 5$$

die Primzerlegung von $2, 3, 5$ in $K(\sqrt{3})$. Es genügt also zu zeigen, daß es bzw. $7, 13, 26$ Hauptideale mit den Relativnormen $2, 3, 5$ gibt, und das ist in der Tat in jedem der vier umfassendsten Integritätsbereiche des fraglichen Körpers der Fall. Da es in jedem dieser vier Bereiche gerade 24 Einheiten mit der Relativnorm E gibt, so gilt also noch der Satz:

Aus jedem umfassendsten Integritätsbereiche J über J_0 des Körpers $H(\sqrt{3})$ entspringen genau

$$24 \sum n(\delta), \quad \delta \rightarrow \text{alle Teiler von } \alpha,$$

Darstellungen jeder total positiven ganzen Zahl des Körpers $K(\sqrt{3})$ als Quadratsumme von vier Zahlen in $K(\sqrt{3})$, die entweder ganz oder aber Hälften von ganzen Zahlen sind.

Zum Schlusse möchte ich Herrn Professor Dr. Herglotz für die Anregung und vielfache Förderung meiner Arbeit den herzlichsten Dank aussprechen.

Schmölln, Dezember 1923.

(Eingegangen am 12. Dezember 1923.)

Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn M. Fekete: Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten[1]).

Von

G. Szegö in Berlin.

In seiner oben genannten Arbeit beweist Herr M. Fekete u. a. den folgenden interessanten Satz:

Es sei E eine beschränkte und abgeschlossene unendliche Punktmenge in der komplexen x-Ebene, $t_n(x)$ das zu E gehörige n-te Tschebyscheffsche Polynom, d. h. dasjenige Polynom n-ten Grades, dessen höchstes Glied x^n ist und dessen Maximalbetrag auf E unter allen derartigen Polynomen möglichst klein ausfällt. Bezeichnet ϱ_n^n den Maximalbetrag von $t_n(x)$ („minimum maximorum"), dann konvergiert die Folge der „mittleren Radien"

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_n, \ldots$$

gegen einen nichtnegativen Grenzwert $\varrho = \varrho(E)$.[2])

Die Größe $\varrho(E)$ hängt offenbar nur von der Menge E ab. Sie gewinnt eine andere Bedeutung durch den folgenden, in einem Spezialfall von mir vermuteten und allgemein ebenfalls von Herrn Fekete bewiesenen Satz:

Bezeichnet $d_n^{\binom{n}{2}} = d_n^{\frac{n(n-1)}{2}}$ den Maximalbetrag des Ausdruckes

$$\prod_{\kappa<\lambda}^{1,2,\ldots,n} (x_\kappa - x_\lambda),$$

während $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängig voneinander die beschränkte und ab-

[1]) Math. Zeitschrift **17** (1923), S. 228–249. Vgl. auch die gleichbetitelte Arbeit von Herrn I. Schur, Math Zeitschrift **1** (1918), S. 377–402.

[2]) A. a. O. [1]), S. 233.

geschlossene unendliche Punktmenge E durchlaufen, dann konvergiert die Folge der „Durchmesser“

$$d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n, \ldots$$

gegen die oben definierte nichtnegative Größe $\varrho(E)$.[3])

Dieser „transfinite Durchmesser“ $\varrho(E)$ hat, wie Herr Fekete in Anlehnung an Herrn Faber zeigt, in dem Spezialfall, wo das Komplementärgebiet $\mathfrak{G}$ von E[4]) *einfach zusammenhängend* ist, eine wichtige Bedeutung: sie ist dann identisch mit der *Abbildungskonstante* von $\mathfrak{G}$, d. h. mit dem Radius desjenigen Kreises, auf dessen Äußere man $\mathfrak{G}$ derart abbilden kann, daß der unendlich ferne Punkt und das Linienelement in demselben ungeändert bleiben.

Ich will nun zeigen, daß diese Größe $\varrho(E)$ ganz allgemein eine recht einfache *potentialtheoretische* Bedeutung besitzt. Zu diesem Zwecke braucht man die Schlüsse der Herren Faber und Fekete nur in ganz wenigen Punkten zu modifizieren.

1. Es sei zunächst an einige bekannte potentialtheoretische Begriffe erinnert. Wir betrachten ein beliebiges einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$ der x-Ebene, das den unendlich fernen Punkt enthält, und definieren seine Robinsche Konstante γ, $\gamma \geqq 0$, auf die folgende Weise: Wenn $\mathfrak{G}$ von endlich vielen geschlossenen, doppelpunktlosen, analytischen Kurven begrenzt ist, dann existiert seine zu dem unendlich fernen Punkt als Aufpunkt gehörige Greensche Funktion G. In diesem Falle soll $\log \gamma$ als der Grenzwert von $\log |x| - G$ erklärt werden für $x \to \infty$. In dem allgemeinen Falle läßt sich $\mathfrak{G}$ durch eine Folge ineinander geschachtelter Gebiete $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_k, \ldots$ der eben erwähnten speziellen Art ausschöpfen. Bekanntlich sind dann die entsprechenden Greenschen Funktionen monoton wachsend, also die Robinschen Konstanten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k, \ldots$ monoton abnehmend. Folglich existiert der Grenzwert $\gamma = \lim_{k \to \infty} \gamma_k$, $\gamma \geqq 0$. Wie man leicht sieht, ist er unabhängig von der Wahl der Gebietsfolge $(\mathfrak{G}_k)$. Er heiße die Robinsche Konstante von $\mathfrak{G}$.

Aus geläufigen Schlüssen der Potentialtheorie folgt, daß in dem von den Herren Faber und Fekete behandelten Spezialfalle die Robinsche Konstante von $\mathfrak{G}$ mit der Abbildungskonstante von $\mathfrak{G}$, also mit dem transfiniten Durchmesser $\varrho(E)$ der zugrunde gelegten Menge E übereinstimmt.

Der allgemeine Fall wird nun erledigt durch den folgenden

Satz: *Es sei E eine beliebige beschränkte und abgeschlossene unendliche Punktmenge in der komplexen x-Ebene. Die Komplementärmenge*

[3]) A. a. O. [1]), S. 234.

[4]) Gebiet ist eine aus lauter inneren Punkten bestehende Punktmenge.

von E zerfällt dann im allgemeinen in mehrere zusammenhängende Teilgebiete. Unter diesen gibt es ein einziges zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$, das den unendlich fernen Punkt enthält. Der transfinite Durchmesser $\varrho(E)$ von E ist identisch mit der Robinschen Konstante γ von $\mathfrak{G}$:

$$\varrho(E) = \gamma.^{5}) \tag{1}$$

2. Betrachten wir zunächst den relativ einfachen Fall, wo E eine „Kurve" K ist, die aus endlich vielen getrennt liegenden geschlossenen, doppelpunktlosen, analytischen Zügen besteht[6]). Das eben definierte Gebiet $\mathfrak{G}$ hat dann eine wohlbestimmte, zum unendlich fernen Punkt als Aufpunkt gehörige Greensche Funktion G. Sie ist regulär im abgeschlossenen Außenbereich von K, mit Ausnahme von $x = \infty$; es ist $\lim_{x \to \infty} (\log|x| - G) = \log\gamma$, γ die Robinsche Konstante von $\mathfrak{G}$. Auf K selbst ist ferner $G = 0$.

Bezeichnet nun $p_n(x)$ irgendein Polynom n-ten Grades mit dem höchsten Glied x^n, so ist

$$u(x) = \frac{1}{n}\log|p_n(x)| - G$$

eine harmonische Funktion, die sich außerhalb und auf K überall, auch im Unendlichen, regulär verhält, mit Ausnahme der eventuellen außerhalb von K liegenden Nullstellen von $p_n(x)$, in denen sie $-\infty$ wird. Folglich ist

$$u(\infty) \leqq \operatorname*{Max}_{x \text{ auf } K} u(x), \quad \text{d. h.} \quad \log\gamma \leqq \operatorname*{Max}_{x \text{ auf } K} \frac{1}{n}|\log p_n(x)|.$$

Aus der letzten Ungleichung schließt man

$$\gamma \leqq \varrho_n, \quad \text{d. h.} \quad \gamma \leqq \varrho(E). \tag{2}$$

Wir zeigen nunmehr das Umgekehrte, d. h. daß $\gamma \geqq \varrho(E)$ gilt. Da die Greensche Funktion G auf K regulär ist, so läßt sie sich ein wenig über jede Randkomponente von K hin fortsetzen. Es sei $\delta > 0$, δ so klein, daß die Niveaulinie $K_{-\delta}$, definiert durch $G = -\delta$, ebenfalls aus endlich vielen geschlossenen, doppelpunktlosen, analytischen Zügen besteht, die

---

[5]) Ich verdanke Herrn K. Löwner die folgende nützliche Bemerkung: Wenn die einzelnen zusammenhängenden Komponenten, in welche das Komplementärgebiet von E zerfällt, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$, ... sind, und der unendlich ferne Punkt zu $\mathfrak{G}$ gehört, so kann man $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$, ... von vornherein zu E adjungieren, ohne hierbei den Maximalbetrag eines beliebigen Polynoms auf E, ohne also $\varrho(E)$ zu ändern. Man kann sich somit von Anfang an auf den Fall beschränken, daß das Komplementärgebiet von E zusammenhängend (jedoch nicht notwendigerweise einfach zusammenhängend) ist.

[6]) Ob die Innenbereiche dieser Züge zu E gerechnet werden oder nicht, ist offenbar belanglos. Vgl. [5]).

natürlich im Innern der entsprechenden Züge von K liegen. Setzt man für die nach außen genommene Normalableitung von G

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \mu(\xi), \tag{3}$$

wobei ξ auf $K_{-\delta}$ liegt, dann ist $\mu(\xi)$ positiv und stetig, ferner

$$\frac{1}{2\pi}\int_{K_{-\delta}} \mu(\xi)\,|d\xi| = 1. \tag{4}$$

Dieses Integral ist als Summe der über die einzelnen Züge von $K_{-\delta}$ erstreckten Integrale aufzufassen; $|d\xi|$ bedeutet das Bogenelement von $K_{-\delta}$. Die bekannte Interpretation von (4) lautet: Die Summe der auf $K_{-\delta}$ angebrachten „Massen" $\frac{1}{2\pi}\mu(\xi)\,|d\xi|$ ist gleich 1.

Es liege jetzt x außerhalb von $K_{-\delta}$. Wendet man die Greensche Formel an auf den Bereich, dessen Rand $K_{-\delta}$ und ein Kreis von beliebig großem Radius ist, so ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi}\int_{K_{-\delta}} \mu(\xi)\log|x-\xi|\,|d\xi| = G + \log\gamma. \tag{5}$$

Insbesondere gilt auf K selbst

$$\frac{1}{2\pi}\int_{K_{-\delta}} \mu(\xi)\log|x-\xi|\,|d\xi| = \log\gamma. \tag{6}$$

Unter n eine beliebige positive ganze Zahl verstanden, teilen wir nun die Kurve $K_{-\delta}$ durch die Zwischenpunkte $\xi_{1n}, \xi_{2n}, \ldots, \xi_{nn}$ derart in n Teile ein, daß den einzelnen Teilbögen stets die gleiche Masse $\frac{1}{n}$ zukommt. Hierbei ist das Wort „Bogen" etwas allgemeiner als üblich zu verstehen; nötigenfalls sind nämlich zwei Bögen von verschiedenen Zügen zu einem einzigen zu vereinigen. Die Anzahl dieser „uneigentlichen" Bögen ist jedoch beschränkt; sie kann die Anzahl der verschiedenen Züge von K nicht übertreffen. Die Länge eines jeden Bogens ist offenbar $\leqq \frac{2\pi}{n\mu}$, wenn wenn μ das positive Minimum von $\mu(\xi)$ auf K ist[7]).

[7]) Um die Vorstellung zu fixieren, kann man zur wirklichen Ausführung dieser Konstruktion auf jedem Zug von K einen bestimmten Punkt festlegen und die einzelnen Züge irgendwie aber bestimmt numerieren. Dann schreite man, ausgehend von dem Anfangspunkt ξ_{1n} des ersten Zuges, in positiver Richtung so lange fort, bis die Masse $\frac{1}{n}$ erlangt ist. (Hierbei gehe man auf den zweiten Zug über, wenn die auf dem ersten angebrachte Gesamtmasse $< \frac{1}{n}$ ist.) Der so ermittelte Endpunkt heiße ξ_{2n}. Von da ab wiederhole man die Konstruktion ähnlich. — Einteilungen dieser Art rühren von Herrn Hilbert her, Göttinger Nachrichten 1897, S. 63. Vgl. auch L. Fejér, Göttinger Nachrichten 1918, S. 319—331. Die im Texte definierten Teilungspunkte $\xi_{1n}, \xi_{2n}, \ldots, \xi_{nn}$ übernehmen in dem von uns betrachteten allge-

Wir ersetzen nun das Integral (6) durch die Summe

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\log|x-\xi_{\nu n}|.$$

Der hierbei begangene Fehler ist höchstens von der Ordnung $\frac{1}{n}$, weil ja die Änderung von $\log|x-\xi|$ auf jedem eigentlichen Teilbogen höchstens von dieser Größenordnung ist. Besonders zu beachten sind die uneigentlichen Teilbögen, deren Anzahl jedoch beschränkt ist. Hieraus folgt, wenn x auf K liegt,

$$\log\gamma-\frac{C}{n}<\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\log|x-\xi_{\nu n}|<\log\gamma+\frac{C}{n},$$

wobei C von n und x frei ist. D. h.

$$\varrho_n\leqq\operatorname*{Max}_{x\text{ auf }K}\prod_{\nu=1}^{n}|x-\xi_{\nu n}|^{\frac{1}{n}}<\gamma e^{\frac{C}{n}}.$$

Durch Grenzübergang $n\to\infty$ ergibt sich hieraus

$$\varrho(E)\leqq\gamma. \tag{7}$$

3. Der allgemeine Fall erledigt sich nunmehr durch eine ähnliche Schlußweise, wie sie von Herrn Fekete, a. a. O. [1]) S. 239, angewendet wurde. Man schöpfe das Gebiet $\mathfrak{G}$ durch eine Folge von ineinander geschachtelten Gebieten $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_k, \ldots$ von der in **2** betrachteten speziellen Art aus. Die Robinsche Konstante von $\mathfrak{G}$ sei γ, die von $\mathfrak{G}_k$ sei γ_k, $k=1, 2, 3, \ldots$. Es sei ferner E_k der Komplementärbereich von $\mathfrak{G}_k$; dann ist E_k beschränkt und enthält für jeden Wert von k die gegebene Menge E als Teilmenge. Bezeichnet also $t_n(x)$ das zu E gehörige n-te Tschebyscheffsche Polynom, dann ist $\gamma_k^n\leqq\operatorname{Max}|t_n(x)|$, wobei x die Menge E_k durchläuft. Es gibt somit einen Randpunkt x_k von $\mathfrak{G}_k$ derart, daß $\gamma_k^n\leqq|t_n(x_k)|$ gilt. Die Punkte x_k, $k=1, 2, 3, \ldots$, können sich aber nur gegen Punkte von E häufen. Wenn x_0 ein solcher Häufungspunkt ist, dann ist $\gamma^n\leqq|t_n(x_0)|\leqq\operatorname{Max}|t_n(x)|$, wobei x die Menge E durchläuft. Hieraus folgt

$$\gamma\leqq\varrho_n,\quad\text{d. h.}\quad\gamma\leqq\varrho(E).$$

Anderseits ist, da E eine Teilmenge von E_k ist, $\varrho(E)\leqq\varrho(E_k)$, also nach **2**

$$\varrho(E)\leqq\gamma_k,\quad\text{d. h.}\quad\varrho(E)\leqq\gamma,$$

so daß $\varrho(E)=\gamma$. Damit ist unsere Behauptung in voller Allgemeinheit bewiesen.

---

meineren Falle die Rolle der von Herrn Fejér definierten, auf einer geschlossenen, doppelpunktlosen, analytischen Kurve *regelmäßig* verteilten Punkte. Sie können auch — ebenso wie bei Herrn Fejér — als Interpolationsstellen für eine, im abgeschlossenen Innenbereich von K reguläre analytische Funktion dienen.

4. Im zweiten Teil seiner Arbeit wendet Herr Fekete seine Sätze über Tschebyscheffsche Polynome auf eine in speziellen Fällen von Herrn Schur (a. a. O. [1]) behandelte Fragestellung bezüglich der Lage der Wurzeln algebraischen Gleichungen mit lauter ganzzahligen Koeffizienten an. Kombiniert man seine Schlußweise mit dem von uns bewiesenen Satz, so läßt sich sein Satz XIII (a. a. O. [1]) S. 245) folgendermaßen verallgemeinern:

Es sei E eine beliebige beschränkte und abgeschlossene unendliche Punktmenge und $\mathfrak{G}$ diejenige zusammenhängende Komponente ihres Komplementärgebietes, die den unendlich fernen Punkt enthält. Es sei γ die Robinsche Konstante von $\mathfrak{G}$. Wenn

$$\alpha > 0, \quad \beta > 1, \quad \beta^2 \gamma < 1$$

ist, so gibt es nur endlich viele ganzzahlige algebraische Gleichungen mit lauter einfachen, der Menge E angehörenden Wurzeln, deren höchstes Glied $a_0 x^n$ der Bedingung

$$0 < a_0 < \alpha \beta^n$$

genügt.

Besonders bemerkenswert ist der Fall $\gamma = 0$. Dann können α und β, abgesehen von der Bedingung $\alpha > 0$, $\beta > 1$, ganz beliebig gewählt werden. Es wäre vielleicht nicht ohne Interesse, für derartige Punktmengen E eine rein mengentheoretische Charakterisierung zu finden[8]).

[8]) Man zeigt leicht, daß es stets $\gamma = 0$ ist, wenn die Menge E *reduzibel* ist, d. h. wenn ihre genügend hohe Ableitungen endlicher Ordnung leer ausfallen. Anderseits ist γ sicher positiv, wenn E ein noch so kleines Kurvenstück enthält.

(Eingegangen am 3. Februar 1924.)

Nachträgliche Bemerkung.

Zu meiner Arbeit „Über Potenzreihen, deren Koeffizienten zahlentheoretische Funktionen sind“ (Math. Zeitschrift 8 (1920), S. 36—51) bemerkt Herr E. Landau folgendes:

1. Die Funktion $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_a(n) z^n$ in § 6 ist auch dann nicht fortsetzbar, wenn $\zeta(1-a) = 0$. Dann ist nämlich $\zeta(1+a) \neq 0$ und $g(s)$ besitzt einen Pol in $s = 1+a$.

2. Die Beweise von §§ 9, 11 lassen sich erheblich abkürzen durch Berücksichtigung der Tatsache, daß $g(s)$ in $s = \frac{2\pi i}{\log k}$ einen Pol hat.

G. Szegö.

Eine Kennzeichnung der Kreise auf der Kugel.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

Ein System $\mathfrak{S}$ von Kurven auf einer Kugel $\mathfrak{K}$ habe folgende Eigenschaften: 1. *Die Kurven von $\mathfrak{S}$ seien differenzierbar, geschlossen und doppelpunktfrei*; 2. *durch drei Punkte von $\mathfrak{K}$ gehe immer genau eine Kurve von $\mathfrak{S}$*; 3. *zwei sich schneidende Kurven von $\mathfrak{S}$ sollen in den beiden Schnittpunkten gleiche Winkel bilden.*

Herr H. Falckenberg hat die Frage aufgeworfen, ob nur die Kreise auf der Kugel diese Eigenschaften haben. Wir wollen hier tatsächlich zeigen: *Das einzige System $\mathfrak{S}$ mit den drei geforderten Eigenschaften besteht aus den ebenen Schnitten der Kugel $\mathfrak{K}$.*

Zum Beweise benutzen wir zunächst einen Satz von E. Study und K. Reidemeister[1]), der besagt: Die Eigenschaften 1. und 2. verbürgen eine derartige Abbildbarkeit von $\mathfrak{K}$ auf eine Eifläche $\mathfrak{E}$, daß dabei das System $\mathfrak{S}$ in die ebenen Schnitte von $\mathfrak{E}$ übergeht. Wir wollen $\mathfrak{E}$ aus einem Punkt $\mathfrak{p}$, der nicht auf $\mathfrak{E}$ liegt, zentral auf sich selbst projizieren. Da bei dieser Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf sich selbst die ebenen Schnitte von $\mathfrak{E}$, deren Ebenen durch $\mathfrak{p}$ gehen, in sich übergeführt werden, können wir mittels 3. schließen: Die entsprechende ebenfalls eineindeutige, stetige und involutorische Abbildung der ganzen Kugel $\mathfrak{K}$ auf sich selbst ist überdies winkeltreu, und zwar offenbar uneigentlich winkeltreu. Deshalb kann man nach bekannten Tatsachen aus der Funktionentheorie bemerken, daß die Abbildung von $\mathfrak{K}$ auf sich selbst wieder durch Zentralprojektion aus einem Punkt $\mathfrak{q}$ erzeugt werden kann. Die Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{K}$ läßt sich deshalb so auf die umgebenden Räume fortsetzen, daß geraden Linien wieder solche entsprechen, und zwar zwei Geraden durch $\mathfrak{p}$ zwei durch

---

[1]) Vgl. W. Blaschke, Differentialgeometrie I, 2. Aufl. § 116. Berlin: Julius Springer 1924.

den entsprechenden Punkt q. Damit ist aber diese Abbildung als Kollineation gekennzeichnet, und darin ist das gewünschte Ergebnis enthalten.

Nach Riemann läßt sich jede geschlossene Fläche vom Zusammenhang der Kugel auf die Kugel eineindeutig und winkeltreu abbilden. Setzen wir in der zu Anfang aufgestellten Behauptung an Stelle der Kugel eine geschlossene Fläche $\mathfrak{F}$, auf der durch die Angabe eines Gaußischen Bogenelements für Längen- und Winkelmessung gesorgt ist, so können wir aus dem Vorhandensein des Systems $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{F}$ erschließen, daß $\mathfrak{F}$ den Zusammenhang der Kugel hat. Wir brauchen dazu etwa nur ein Büschel von Kurven aus $\mathfrak{S}$ zu betrachten, die sich an einer Stelle berühren. Dann kann man mittels des Abbildungssatzes von Riemann und der hier vorgetragenen Schlußweise zeigen, daß unser System $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{F}$ bei der konformen Abbildung von $\mathfrak{F}$ auf die Kugel $\mathfrak{K}$ den Kreisen von $\mathfrak{K}$ entspricht.

Unser Ergebnis ist nicht ohne Bedeutung für die axiomatische Begründung der Lehre von Möbius' Kreisverwandtschaften[2]).

Hamburg, Mathematisches Seminar, Weihnachten 1923.

---

[2]) Vgl. W. Blaschke, Eine topologische Kennzeichnung der Kreise auf der Kugel, Hamburger Abhandlungen **3** (1924)

(Eingegangen am 2. Januar 1924.)

Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragungen.

Von

A. Friedmann in Petrograd und J. A. Schouten in Delft.

§ 1.
Einleitung.

In der Theorie der höheren Übertragungen[1]) hat sich gezeigt, daß jede lineare Übertragung, also auch jede sich auf eine solche Übertragung gründende Differentialgeometrie, vollständig festgelegt werden kann durch Angabe von drei Größen:

1. die Größe $C_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$, die angibt, inwiefern sich die kontravarianten und kovarianten Parameter, $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ und $\Gamma_{\lambda\mu}^{\prime\nu}$, unterscheiden,

2. die Größe $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$, die angibt, inwiefern die kontravarianten Parameter asymmetrisch sind, und

3. die Größe $Q_{\mu}^{\cdot\lambda\nu}$, der kovariante Differentialquotient eines beliebigen Tensors n-ten Ranges $g^{\lambda\nu}$.

Die allgemeinste lineare Übertragung entsteht, wenn diese drei Größen keinen besonderen Bedingungen unterworfen werden, die Riemannsche Geometrie, wenn sie alle drei verschwinden.

Die drei Größen können sich nun, ohne Null zu werden, auf Produkte von Vektoren mit dem Einheitsaffinor bzw. mit $g^{\lambda\nu}$ reduzieren. Es entstehen dann Zwischenfälle, die in der erwähnten Arbeit zur Klassifizierung der verschiedenen Übertragungen herangezogen werden.

Die geometrischen Eigenschaften dieser Zwischenfälle werden in der vorliegenden Arbeit untersucht. Es zeigt sich dabei, daß die Übertragungen mit degeneriertem $C_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ und $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ sich durch bemerkenswerte einfache Eigen-

[1]) J. A. Schouten, Über die verschiedenen Arten der Übertragung, die einer Differentialgeometrie zugrunde gelegt werden können. Math. Zeitschr. **13** (1922), S. 56—81, Nachtr. **15** (1922), S. 168, weiterhin zitiert als Ü.D. Vgl. auch „Der Ricci-Kalkül" von demselben Autor, Berlin 1924, Julius Springer, weiterhin zitiert als R K., insbesondere Abschnitt II.

schaften der geodätischen Mannigfaltigkeiten auszeichnen. Degeneriert auch $Q_\mu^{\lambda\nu}$, so entstehen Übertragungen, die direkte Verallgemeinerungen der Weylschen Übertragung sind, und vielleicht in der Physik Verwendung finden können. Am Schluß der Arbeit wird kurz referiert über eine Verallgemeinerung der Einsteinschen affinen Feldtheorie, die gerade zu einer Übertragung der hier erwähnten Art geführt hat.

§ 2.

Die Größen der X_n.

Die Differentiale der Urvariablen x^ν, $\nu = a_1, \ldots, a_n$ einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n transformieren sich beim Übergang zu anderen Urvariablen $'x^\nu$ (homogen) affin:

$$(1)\qquad \begin{aligned} d'x^\nu &= P'^\nu_{.\lambda}\, dx^\lambda; \qquad P'^\nu_{.\lambda} = \frac{\partial' x^\nu}{\partial x^\lambda}, \\ dx^\nu &= Q'^\nu_{.\lambda}\, d'x^\lambda; \qquad Q'^\nu_{.\lambda} = \frac{\partial x^\nu}{\partial' x^\lambda}. \end{aligned}$$

Die $P'^\nu_{.\lambda}$ sind n^2 Ortsfunktionen, die nur der Integrabilitätsbedingung

$$(2)\qquad \frac{\partial P'^\nu_{.\lambda}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial P'^\nu_{.\mu}}{\partial x^\lambda}$$

genügen müssen, im übrigen aber alle Werte annehmen können.

Ein kontravarianter Vektor ist ein System von n Bestimmungszahlen v^ν, die sich bei der Transformation (1) transformieren wie die dx^ν:

$$(3)\qquad 'v^\nu = P'^\nu_{.\lambda} v^\lambda.$$

Ein kovarianter Vektor wird gewöhnlich definiert als ein System von n Bestimmungszahlen w_λ, die sich bei der Transformation (1) kontragredient zu den dx^ν transformieren:

$$(4)\qquad 'w_\lambda = Q'^\nu_{.\lambda} w_\nu.$$

Wir wollen uns aber die Freiheit vorbehalten, den Maßstab der kovarianten Vektoren unabhängig von (4) zu ändern, und führen deshalb statt (4) als Definitionsgleichung ein

$$(5)\qquad 'w_\lambda = \tau^{-1} Q'^\nu_{.\lambda} w_\nu,$$

wo τ eine beliebige Ortsfunktion ist. Die Transformation

$$(6)\qquad 'w_\lambda = \tau^{-1} w_\lambda,$$

die aus (5) entsteht, wenn die Urvariablen nicht geändert werden, soll *Änderung des kovarianten Maßes*[2]) heißen.

[2]) Ü.D. S. 60; R.K. S. 57.

Bei unseren Voraussetzungen ist es nicht möglich, mit Hilfe von (1) eine ebensolche Änderung des kontravarianten Maßes herbeizuführen. Denn die Gleichungen (1) können infolge (2) nur dann in

$$d'x^\nu = \tau' dx^\nu \tag{7}$$

übergehen, wenn τ' über X_n konstant ist. Es ist aber ein allgemeinerer Ansatz möglich, bei dem die Integrabilitätsbedingungen (2) nicht erfüllt sind, die dx^ν infolgedessen nicht exakte Differentiale werden, und die x^ν somit jede Bedeutung verlieren. Bei diesem Ansatz wären dann die Gleichungen (3) und (4) ohne (2) statt (3) und (5) mit (2) als Definitionsgleichungen einzuführen. Wir lassen diesen Ansatz, der für eine weitere Vertiefung der Grundlagen der Differentialgeometrie vielleicht nicht ohne Bedeutung ist, hier beiseite und verwenden demnach (3) und (5) mit (2) als Definitionsgleichungen.

Kovariante, kontravariante und gemischte Größen oder Affinoren höheren Grades werden in bekannter Weise definiert als Systeme von n^p Bestimmungszahlen, die sich transformieren wie die n^p Produkte der Bestimmungszahlen von p verschiedenen Vektoren.

In einer Mannigfaltigkeit mit einer euklidisch-affinen Geometrie, E_n, läßt sich ein *kontravarianter* Vektor darstellen durch zwei Punkte der E_n, denen eine bestimmte Richtung, ein bestimmter durch einen (vorzugsweise, aber nicht notwendig, geraden) Pfeil angebbarer Sinn und eine bestimmte gegenseitige Lage zukommt, aber kein bestimmter Ort in der E_n. Ebenso läßt sich ein kovarianter Vektor darstellen durch zwei parallele Hyperebenen in der E_n, denen eine bestimmte $(n-1)$-Richtung[3]), ein bestimmter durch einen (vorzugsweise nicht geraden) die beiden E_{n-1} durchstechenden Pfeil angebbarer Sinn und eine bestimmte gegenseitige Lage zukommt, aber kein bestimmter Ort in der E_n. Die Bestimmungszahlen sind die reziproken Werte der Stücke, die die beiden E_{n-1} aus den Koordinatenachsen herausschneiden, gemessen mit Hilfe der kontravarianten Maßvektoren.

Da sich die Umgebung eines Punktes einer X_n als infinitesimale E_n auffassen läßt, kann man sich die zu einem Punkte der X_n gehörigen Größen in dieser E_n geometrisch dargestellt denken.

Ist $v_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \mu_1 \ldots \mu_q}$ eine beliebige Größe, so versteht man unter $v_{(\lambda_1 \ldots \lambda_p) \mu_1 \ldots \mu_q}$ die Größe, die entsteht, indem alle $p!$ möglichen Permutationen der Indizes $\lambda_1 \ldots \lambda_p$ summiert werden und die Summe durch $p!$ dividiert wird. Ebenso versteht man unter $v_{[\lambda_1 \ldots \lambda_p] \mu_1 \ldots \mu_q}$ die Größe, die in derselben Weise entsteht, wenn man den ungeraden Permutationen bei der Summierung das nega-

[3]) p-Richtung = Stellung einer ebenen p-dimensionalen Mannigfaltigkeit in der E_n.

tive Vorzeichen verleiht. Die Prozesse heißen *mischen* bzw. *alternieren* über $\lambda_1 \ldots \lambda_p$ und die entstehende Größe heißt *symmetrisch* bzw. *alternierend* in $\lambda_1 \ldots \lambda_p$.

Werden p kontravariante Vektoren $\overset{1}{v}{}^{\nu}, \ldots, \overset{p}{v}{}^{\nu} \ldots, p \leqq n$ alternierend multipliziert, d. h. multpliziert und alterniert:

$$v^{\nu_1 \cdots \nu_p} = \overset{1}{v}{}^{[\nu_1} \ldots \overset{p}{v}{}^{\nu_p]}, \tag{8}$$

so entsteht ein *einfacher kontravarianter p-Vektor*. Ebenso läßt sich ein *einfacher kovarianter p-Vektor* bilden. Der einfache kontravariante p-Vektor hat eine bestimmte p-Richtung, der einfache kovariante p-Vektor dagegen eine $(n-p)$-Richtung, nämlich die $(n-p)$-Richtung, die den p $(n-1)$-Richtungen der p Faktoren gemeinschaftlich ist[4]).

§ 3.

Die allgemeine lineare Übertragung der X_n.

Zwei zu verschiedenen Punkten der X_n gehörige Größen, die keine Skalare sind, lassen sich erst dann vergleichen, wenn eine *Übertragung* eingeführt ist. Die allgemeinste *lineare Übertragung* ist gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla_\mu v^\nu &= \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda; \qquad \delta v^\nu = dv^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda dx^\mu, \\ \nabla_\mu w_\lambda &= \frac{\partial w_\lambda}{\partial x^\mu} - \Gamma'^\nu_{\lambda\mu} w_\nu; \qquad \delta w_\lambda = dw_\lambda - \Gamma'^\nu_{\lambda\mu} w_\nu dx^\mu. \end{aligned} \tag{9}$$

δ ist das Zeichen des *geodätischen Differentials*, ∇ das Zeichen des *geodätischen Differentialquotienten*. Wird eine Größe längs einer Kurve so transportiert, daß ihr geodätisches Differential verschwindet, so nennt man diese Bewegung *geodätisch* oder *pseudoparallel* im Sinne der zugrunde gelegten Übertragung. Das geodätische Differential ist ein gewöhnliches Differential in bezug auf ein geodätisch mitbewegtes Bezugssystem.

Die $2n^3$ Parameter $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ und $\Gamma'^\nu_{\lambda\mu}$ sind beliebig. Diese Parameter transformieren sich *nicht* wie die Bestimmungszahlen einer Größe dritten Grades. Die Differenzen:

$$C_{\mu\lambda}{}^\nu = \Gamma^\nu_{\lambda\mu} - \Gamma'^\nu_{\lambda\mu} \tag{10}$$

sind aber Bestimmungszahlen eines Affinors und das Gleiche gilt für die Differenzen:

$$\begin{aligned} 2S_{\lambda\mu}{}^\nu &= \Gamma^\nu_{\lambda\mu} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda}, \\ 2S'_{\lambda\mu}{}^\nu &= \Gamma'^\nu_{\lambda\mu} - \Gamma'^\nu_{\mu\lambda}. \end{aligned} \tag{11}$$

[4]) Vgl. R.K. S. 17 ff.

Der Affinor $C_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ ist der Differentialquotient des Einheitsaffinors A_λ^ν:

$$A_\lambda^\nu = \begin{cases} 1, & \lambda = \nu \\ 0, & \lambda \neq \nu \end{cases}; \quad \nabla_\mu A_\lambda^\nu = C_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}. \tag{12}$$

Für die geodätische Differentiation eines *Produktes* gelten die gewöhnlichen Regeln[5]), für die geodätische Differentiation einer Überschiebung aber gilt die Gleichung:

$$\delta(v^\lambda w_\lambda) = w_\lambda \delta v^\lambda + v^\lambda \delta w_\lambda - C_{\mu\alpha}^{\cdot\cdot\beta} w_\beta v^\alpha dx^\mu, \tag{13}$$

die ein Zusatzglied mit $C_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ enthält. Überschiebungen sind also nur dann bei jeder pseudoparallelen Verschiebung im Sinne der zugrunde gelegten Übertragung invariant, wenn $C_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ verschwindet. Die Übertragung heißt dann *überschiebungsinvariant*. Bei einer überschiebungsinvarianten Übertragung ändert sich also $v^\lambda w_\lambda$ nicht, wenn v^ν und w_λ beide pseudoparallel um dx^ν verschoben werden. Damit wenigstens alle Inzidenzen bei pseudoparallelen Verschiebungen invariant bleiben, ist infolge (13) notwendig und hinreichend, daß $C_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ die Form hat

$$C_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = C_\mu A_\lambda^\nu, \tag{14}$$

wo C_λ ein beliebiger Vektor ist. Die Übertragung heißt dann *inzidenzinvariant*. Bei einer inzidenzinvarianten Übertragung bleibt also die Gleichung $v^\lambda w_\lambda = 0$ gelten, wenn v^ν und w_λ beide pseudoparallel um dx^ν verschoben werden.

Sind $d_1 x^\nu$ und $d_2 x^\nu$ zwei Verrückungen in P, und verschiebt man einerseits $d_2 x^\nu$ pseudoparallel längs $d_1 x^\nu$, andererseits $d_1 x^\nu$ pseudoparallel längs $d_2 x^\nu$, so bilden die vier Vektoren im allgemeinen kein geschlossenes Viereck. Der Vektor, der die Lücke schließt, ist bis auf Größen höherer Ordnung gleich

$$D_{12} x^\nu = \delta_2 d_1 x^\nu - \delta_1 d_2 x^\nu = 2 d_1 x^\lambda d_2 x^\mu S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}. \tag{15}$$

Das Viereck schließt sich also dann und nur dann stets, wenn $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ verschwindet. Die Übertragung heißt dann *kontravariant symmetrisch*. Hat $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ die Form

$$S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = S_{[\lambda} A_{\mu]}^\nu, \tag{16}$$

so schließt sich das Viereck dann und nur dann, wenn die Richtungen von $d_1 x^\nu$ und $d_2 x^\nu$ beide in der $(n-1)$-Richtung von S_λ enthalten sind. Die Übertragung heißt dann *kontravariant halbsymmetrisch*.

---

[5]) Es ist also z. B.

$$\nabla_\mu w_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{\partial w_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}}{\partial x^\mu} - \Gamma'^{\nu}_{\lambda_1 \mu} w_{\nu \lambda_2 \lambda_3} - \Gamma'^{\nu}_{\lambda_2 \mu} w_{\lambda_1 \nu \lambda_3} - \Gamma'^{\nu}_{\lambda_3 \mu} w_{\lambda_1 \lambda_2 \nu}.$$

Ist p ein Skalarfeld, so ist $\nabla_\lambda p$ sein Gradientfeld. Die Rotation dieses Gradienten

$$\nabla_{[\mu}\nabla_{\lambda]}p = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}\right) - S'^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}\nabla_\nu p \tag{17}$$

verschwindet dann und nur dann stets, wenn $S'^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$ verschwindet. Die Übertragung heißt dann *kovariant symmetrisch*. Hat $S'^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$ die Form

$$S'^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} = S'_{[\lambda}A^\nu_{\mu]}, \tag{18}$$

so verschwindet die Rotation dann und nur dann, wenn $\nabla_\lambda p$ und S'_λ dieselbe $(n-1)$-Richtung haben. Die Übertragung heißt dann *kovariant halbsymmetrisch*.

Symmetrisch bzw. *halbsymmetrisch* soll eine Übertragung heißen, wenn sie die angedeutete Eigenschaft sowohl kovariant als kontravariant besitzt.

Infolge (10) und (11) ist eine inzidenzinvariante Übertragung kovariant halbsymmetrisch, wenn sie kontravariant halbsymmetrisch ist, und umgekehrt, und es gilt dann

$$S_\lambda - S'_\lambda = -C_\lambda. \tag{19}$$

Bei Änderung des kovarianten Maßes bleibt $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ fest, während $\Gamma'^\nu_{\lambda\mu}$ sich folgendermaßen transformiert:

$$'\Gamma'^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma'^\nu_{\lambda\mu} - A^\nu_\lambda \nabla_\mu \log\tau. \tag{20}$$

Daraus folgen für die Transformationen von $C^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda}$, $S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$ und $S'^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} '{C}^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda} &= C^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda} + A^\nu_\lambda \nabla_\mu \log\tau, \\ '{S}^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} &= S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}, \\ '{S'}^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} &= S'^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} - A^\nu_{[\lambda}\nabla_{\mu]}\log\tau. \end{aligned} \tag{21}$$

Ist also eine Übertragung inzidenzinvariant oder kovariant halbsymmetrisch, so behält sie diese Eigenschaft bei Änderung des kovarianten Maßes:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad '{C}_\mu = C_\mu + \nabla_\mu \log\tau, \\ &\text{b)}\quad '{S}'_\mu = S'_\mu + \nabla_\mu \log\tau. \end{aligned} \tag{22}$$

Ist $g^{\lambda\mu}$ irgendein Tensor zweiten Grades n-ten Ranges und $g_{\lambda\mu}$ sein adjungierter Tensor:

$$g^{\nu\alpha}g_{\alpha\lambda} = A^\nu_\lambda, \tag{23}$$

so werden die ersten Differentialquotienten dieser Größen im allgemeinen Größen dritten Grades sein:

$$\nabla_\mu g^{\lambda\nu} = Q^{\cdot\lambda\nu}_{\mu}; \qquad \nabla_\mu g_{\lambda\nu} = Q'_{\mu\lambda\nu}. \tag{24}$$

Differentiation der Gleichung (23) ergibt

$$Q'_{\mu\lambda\nu} = -Q_{\mu\lambda\nu} + 2C_{\mu(\lambda\nu)}, \tag{25}$$

n welcher Gleichung das Herauf- und Herunterziehen von Indizes in ezug auf $g_{\lambda\mu}$, $g^{\lambda\mu}$ verwendet ist. Werden nun die Tensoren $g^{\lambda\mu}$ und $_{\lambda\mu}$ als Fundamentaltensoren eingeführt und wird der Winkel zwischen zwei ektoren mit Hilfe dieser Tensoren in der gewöhnlichen Weise festgelegt, o folgt, daß eine inzidenzinvariante Übertragung nur dann *kontravariant inkeltreu* ist, wenn $Q'_{\mu\lambda\nu}$ die Form hat

$$Q'_{\mu\lambda\nu} = Q'_{\mu} g_{\lambda\nu}, \tag{26}$$

nd daß sie nur dann *kovariant winkeltreu* ist, wenn $Q_{\mu}^{\cdot\lambda\nu}$ die Form hat

$$Q_{\mu}^{\cdot\lambda\nu} = Q_{\mu} g^{\lambda\nu}. \tag{27}$$

Verschwindet $Q_{\mu\lambda\nu}$ bzw. $Q_{\mu}^{\cdot\lambda\nu}$, so heißt die inzidenzinvariante Übertragung *kontravariant* bzw. *kovariant maßtreu*.

Bei einer inzidenzinvarianten winkeltreuen Übertragung ändert sich der Winkel zwischen v^ν und w^ν bzw. v_λ und w_λ nicht, wenn diese Vektoren pseudoparallel um dx^ν verschoben werden. Bei einer inzidenzinvarianten maßtreuen Übertragung ändert sich auch der mittels $g_{\lambda\nu}$ bzw. $g^{\lambda\nu}$ gemessene Betrag von v^ν bzw. v_λ nicht.

Aus (25) folgt, daß eine inzidenzinvariante Übertragung kovariant winkeltreu ist, wenn sie kontravariant winkeltreu ist, und umgekehrt, und daß dann die Gleichung gilt:

$$Q'_{\lambda} + Q_{\lambda} = 2C_{\lambda}. \tag{28}$$

Gilt (26) bzw. (27), so wollen wir eine Übertragung auch dann kontra- bzw. kovariant winkeltreu nennen, wenn sie nicht inzidenzinvariant ist.

§ 4.

Kontravariant und kovariant geodätische Linien.

Wird ein kontravarianter Vektor in P in der eigenen Richtung pseudoparallel verschoben, so entsteht bei Fortsetzung dieses Verfahrens eine *kontravariant geodätische Linie* durch P; in jedem Punkte einer solchen Linie gilt die Gleichung

$$v^\mu \nabla_\mu v^\nu = \alpha v^\nu, \tag{29}$$

worin v^ν der irgendwie normierte tangierende kontravariante Vektor und ein vom Orte abhängiger Zahlenfaktor ist.

Wird ein kovarianter $(n-1)$-Vektor in der eigenen Richtung pseudo parallel verschoben, so entsteht eine *kovariant geodätische Linie* durch P In jedem Punkte dieser Linie gilt die Gleichung

$$v^\mu \nabla_\mu w_{\lambda_2 \dots \lambda_n} = \beta w_{\lambda_2 \dots \lambda_n}, \tag{30}$$

worin $w_{\lambda_2 \dots \lambda_n}$ der irgendwie normierte tangierende $(n-1)$-Vektor, v^ν ei tangierender kontravarianter Vektor und β ein vom Orte abhängiger Zahlen faktor ist. Gilt (29) bzw. (30) nur in einem Punkte einer Kurve, s heißt die Kurve in diesem Punkte kontra- bzw. kovariant geodätisch.

Ändert man die Übertragungsparameter $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$:

$$'\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + A_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}, \tag{31}$$

so ist $A_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ offenbar ein Affinor. (29) geht über in

$$v^\mu {}'\nabla_\mu v^\nu = \alpha v^\nu + v^\lambda v^\mu A_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}, \tag{32}$$

und aus dieser Gleichung geht hervor, daß die kontravariant geodätisch Eigenschaft dann und nur dann beim Übergang (31) stets erhalten bleibt wenn für jede Wahl von v^ν

$$v^\lambda v^\mu A_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \gamma v^\nu. \tag{33}$$

Dies ist aber, wie man leicht zeigt, nur dann der Fall, wenn $A_{(\lambda\mu)}^{\cdot\cdot\nu}$ die Form hat

$$A_{(\lambda\mu)}^{\cdot\cdot\nu} = p_{(\lambda} A_{\mu)}^{\nu}. \tag{34}$$ [6])

In derselben Weise folgt, daß die kovariant geodätische Eigenschaf dann und nur dann stets erhalten bleibt bei der Änderung der $\Gamma_{\lambda\mu}^{\prime\nu}$:

$$'\Gamma_{\lambda\mu}^{\prime\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\prime\nu} + A'^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}, \tag{35}$$

wenn $A'^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$ die Form hat

$$A'^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} = p'_{(\lambda} A^{\nu}_{\mu)}. \tag{36}$$

Wir können jetzt die Frage beantworten, welchen Bedingungen ein Übertragung zu genügen hat, damit jede in einem Punkt kontravarian geodätische Kurve in demselben Punkte auch kovariant geodätisch ist Dies ist z. B. der Fall, wenn die Übertragung inzidenzinvariant ist. E ist also infolge (14), (31) und (34) dann und nur dann der Fall, wen $C_{(\mu\lambda)}^{\cdot\cdot\nu}$ die Form hat

$$C_{(\mu\lambda)}^{\cdot\cdot\nu} = c_{(\mu} A_{\lambda)}^{\nu}. \tag{37}$$

Wir haben also den Satz erhalten: *Damit jede kovariant geodätisch Linie auch kontravariant geodätisch ist, ist notwendig und hinreichend daß $C_{(\mu\lambda)}^{\cdot\cdot\nu}$ die Form* (37) *hat.*

[6]) R. K. S. 59 Aufg. 4, vgl. S. 312.

§ 5.

Kontravariant und kovariant geodätische X_m in einer X_n.

In einem Punkte P der X_n legen wir durch die ∞^{n-2} Richtungen einer $(n-1)$-Richtung ∞^{n-2} Kurven, die in P kovariant geodätisch sind. Es entsteht dann eine X_{n-1}. Ist W_λ der tangierende kovariante Vektor der X_{n-1}, so gelten in P die Gleichungen

$$\text{(38)} \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad v^\mu \nabla_\mu w_{\lambda_2 \dots \lambda_n} = \beta w_{\lambda_2 \dots \lambda_n}, \\ &\text{b)} \quad W_{[\lambda_1} w_{\lambda_2 \dots \lambda_n]} = 0, \end{aligned}$$

für jede Kurve v^ν, $w_{\lambda_2 \dots \lambda_n}$ der X_{n-1} durch P. Differentiation von (38b) lehrt, unter Berücksichtigung von (38a):

$$\text{(39)} \qquad v^\mu (\nabla_\mu W_{[\lambda_1}) w_{\lambda_2 \dots \lambda_n]} = 0,$$

gleichbedeutend mit

$$\text{(40)} \qquad v^\lambda v^\mu \nabla_\mu W_\lambda = 0,$$

gültig für jeden Wert von v^ν, der der Gleichung

$$\text{(41)} \qquad v^\lambda W_\lambda = 0$$

genügt. Da (40) also eine Folge von (41) sein muß, muß $v^\lambda W_\lambda$ in $v^\lambda v^\mu \nabla_\mu W_\lambda$ als Faktor enthalten sein, und es muß also eine Gleichung bestehen von der Form:

$$\text{(42)} \qquad v^\lambda v^\mu \nabla_\mu W_\lambda = v^\lambda W_\lambda v^\mu r_\mu$$

oder

$$\text{(43)} \qquad \nabla_{(\mu} W_{\lambda)} = r_{(\mu} W_{\lambda)}.$$

Das Feld W_λ tangiert die X_{n-1} und läßt sich also in der X_n stets so fortsetzen, daß es Gradient eines Skalarfeldes ist. Infolge (17) ist demnach

$$\text{(44)} \qquad \nabla_{[\mu} W_{\lambda]} = - S'^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} W_\nu,$$

so daß

$$\text{(45)} \qquad \nabla_\mu W_\lambda = r_{(\mu} W_{\lambda)} - S'^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} W_\nu.$$

Wir wollen nun eine X_{n-1} *in P kovariant geodätisch* nennen, wenn $dx^\mu \nabla_\mu W_\lambda$ für jede in der X_{n-1} liegende Verrückung dx^ν in P die $(n-1)$-Richtung von W_λ hat. Die X_{n-1} ist also infolge (45) dann und nur dann kovariant geodätisch, wenn $v^\mu S'^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} W_\nu$ die $(n-1)$-Richtung von W_λ hat. Damit dies für jede beliebige aus kovariant geodätischen Linien aufgebaute X_{n-1} gilt, ist demnach notwendig und hinreichend, daß die Gleichung

$$\text{(46)} \qquad v^\mu S'^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} W_\nu = \varepsilon W_\lambda$$

für alle Werte von v^ν und W_λ gilt, die der Gleichung (41) genügen. Man beweist aber leicht, daß dies dann und nur dann der Fall ist, wenn $S'^{\ \ \nu}_{\lambda\mu}$ die Form (18) hat[7]), d. h. wenn die Übertragung kovariant halbsymmetrisch ist.

Nennt man eine X_{n-1} *in* P *kontravariant geodätisch*, wenn das Differential des tangierenden kontravarianten $(n-1)$-Vektors $V^{\lambda_2 \dots \lambda_n}$ nämlich $dx^\mu \nabla_\mu V^{\lambda_2 \dots \lambda_n}$, für jede ganz in der X_{n-1} liegende Verrückung dx^ν in P die $(n-1)$-Richtung von $V^{\lambda_2 \dots \lambda_2}$ hat, so beweist man in derselben Weise, daß eine X_{n-1}, die aus Kurven gebildet wird, die alle in P kontravariant geodätisch sind, dann und nur dann stets kontravariant geodätisch ist, wenn die Übertragung kontravariant halbsymmetrisch ist.

In P legen wir jetzt ∞^{p-1} in P kovariant geodätische Kurven durch die ∞^{p-1} Richtungen einer p-Richtung, $p>1$. Ist $W_{\lambda_{p+1} \dots \lambda_n} = \overset{1}{W}_{[\lambda_{p+1}} \dots \overset{n-p}{W}_{\lambda_n]}$ der tangierende kovariante $(n-p)$-Vektor der entstehenden X_p, so gelten die Gleichungen:

$$\text{(47)} \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad v^\mu \nabla_\mu w_{\lambda_2 \dots \lambda_n} = \beta\, w_{\lambda_2 \dots \lambda_n}, \\ &\text{b)} \quad \overset{u}{W}_{[\lambda} w_{\lambda_2 \dots \lambda_n]} = 0, \qquad u = 1, \dots, n-p \end{aligned}$$

für jede Kurve v^ν, $w_{\lambda_2 \dots \lambda_n}$ der X_p durch P. Differentiation von (47 b) lehrt unter Berücksichtigung von (47 a)

$$\text{(48)} \qquad v^\lambda v^\mu \nabla_\mu \overset{u}{W}_\lambda = 0\,.$$

Da die Felder $\overset{u}{W}_\lambda$ sich aber alle in der X_n so fortsetzen lassen, daß Gradientfelder entstehen, so folgt wie oben:

$$\text{(49)} \qquad \nabla_\mu \overset{u}{W}_\lambda = \overset{u}{r}_{(\mu} \overset{u}{W}_{\lambda)} - S'^{\ \ \nu}_{\lambda\mu} \overset{u}{W}_\nu\,.$$

Eine X_p soll in P kovariant geodätisch heißen, wenn $dx^\mu \nabla_\mu W_{\lambda_{p+1} \dots \lambda_n}$ für jede in der X_p liegende Verrückung dx^ν in P die p-Richtung von $W_{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n}$ hat. Es soll also in P die Gleichung

$$\text{(50)} \qquad v^\mu \nabla_\mu W_{\lambda_{p+1} \dots \lambda_n} = \eta\, W_{\lambda_{p+1} \dots \lambda_n}$$

gelten für jede Wahl von v^ν, die der Gleichung

$$\text{(51)} \qquad v^\lambda \overset{u}{W}_\lambda = 0, \qquad u = 1, \dots, n-p$$

genügt. Nun folgt aber aus (49) und (51):

$$\text{(52)} \qquad \begin{aligned} v^\mu \nabla_\mu W_{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n} = \frac{1}{2} v^\mu \sum_u \overset{u}{r}_\mu W_{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n} \\ + (n-p) v^\mu S'^{\ \ \nu}_{\mu[\lambda_{p+1}} W_{|\nu|\, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n]}\,. \end{aligned}$$

[7]) R. K. S. 59, Aufg. 6.

Damit also jede aus in P kovariant geodätischen Linien aufgebaute X_p in P kovariant geodätisch ist, ist notwendig und hinreichend, daß eine Gleichung der Form

$$v^\mu S'_{\mu[\lambda_n}{}^{\cdot\cdot\nu} W_{\lambda_{p+1}\ldots\lambda_{n-1}]\nu} = \eta W_{\lambda_{p+1}\ldots\lambda_n} \tag{53}$$

gilt für alle Werte von v^ν und $W_{\lambda_{p+1}\ldots\lambda_n}$, die der Gleichung (51) genügen. Nun ist aber (53) gleichbedeutend mit der Bedingung

$$v^\mu S'_{\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\nu} \overset{u}{W}_\nu = \zeta \overset{u}{W}_\lambda, \qquad u = 1, \ldots, n-p, \tag{54}$$

gültig für alle Werte von v^ν und $\overset{u}{W}_\lambda$, die der Gleichung (51) genügen, d. h. die Übertragung muß kovariant halbsymmetrisch sein.

Entsprechende Überlegungen lassen sich aufstellen für kovariant geodätische Gebilde.

Zusammenfassend können wir also den Satz aussprechen:

Damit jede X_p in X_n, $p > 1$, deren Kurven durch einen Punkt P kovariant bzw. kontravariant geodätisch sind, in diesem Punkte selbst kovariant bzw. kontravariant geodätisch ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Übertragung der X_n kovariant bzw. kontravariant halbsymmetrisch ist.

Daß eine X_p und eine X_q, $p + q < n$, die beide ko- bzw. kontravariant geodätisch sind, sich bei einer ko- bzw. kontravariant halbsymmetrischen Übertragung in einer ko- bzw. kontravariant geodätischen X_{p+q-n} schneiden, ist eine unmittelbare Folge des ausgesprochenen Satzes.

§ 6.

Die geodätisch einheitliche Übertragung.

Wenn eine Übertragung so beschaffen ist, daß erstens kovariant und kontravariant geodätische Linien identisch sind, und zweitens jede aus in P geodätischen Linien aufgebaute X_p in P selbst geodätisch ist, so soll die Übertragung *geodätisch einheitlich* heißen. Nach dem Vorhergehenden lauten die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine Übertragung geodätisch einheitlich ist, folgendermaßen:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad C_{(\mu\lambda)}{}^{\cdot\cdot\nu} = c_{(\mu} A^\nu_{\lambda)}, \\ &\text{b)} \quad S_{\lambda\mu}{}^{\cdot\cdot\nu} = S_{[\lambda} A^\nu_{\mu]}, \\ &\text{c)} \quad S'_{\lambda\mu}{}^{\cdot\cdot\nu} = S'_{[\lambda} A^\nu_{\mu]}. \end{aligned} \tag{55}$$

Aus den Erörterungen des § 3 geht hervor, daß eine geodätisch einheitliche Übertragung diese Eigenschaft behält bei Änderung des kovarianten Maßes.

Aus (10) und (11) folgt

$$C_{[\mu\,\lambda]}^{\quad\nu} = S_{\lambda\,\mu}^{\quad\nu} - S'^{\quad\nu}_{\lambda\,\mu} . \tag{56}$$

Setzen wir also

$$s_\lambda = S_\lambda - S'_\lambda , \tag{57}$$

so ist für eine geodätisch einheitliche Übertragung

$$C_{\mu\,\lambda}^{\quad\nu} = c_{(\lambda} A^\nu_{\mu)} + s_{[\lambda} A^\nu_{\mu]} = \frac{1}{2}(c_\lambda + s_\lambda) A^\nu_\mu + \frac{1}{2}(c_\mu - s_\mu) A^\nu_\lambda . \tag{58}$$

Es ist jetzt der Fall zu untersuchen, daß die Übertragung gleichzeitig geodätisch einheitlich und sowohl kovariant als kontravariant winkeltreu ist. Aus (25), (26), (27) und (58) ergibt sich in diesem Falle:

$$(Q'_\mu + Q_\mu) g_{\lambda\nu} = (c_{(\lambda} + s_{(\lambda)}) g_{\nu)\mu} + (c_\mu - s_\mu) g_{\lambda\nu} , \tag{59}$$

welche Gleichung nur erfüllt sein kann, wenn

$$c_\lambda + s_\lambda = 0 . \tag{60}$$

Infolge (58) ist die Übertragung also inzidenzinvariant mit

$$C_\lambda = \frac{1}{2}(c_\lambda - s_\lambda) = -s_\lambda = S'_\lambda - S_\lambda . \tag{61}$$

Damit ist der Satz gewonnen:

Ist eine geodätisch einheitliche Übertragung sowohl kovariant als kontravariant winkeltreu, so ist sie inzidenzinvariant.

§ 7.

Physikalisches.

In einer Arbeit über eine nichtsymmetrische affine Feldtheorie ist einer von uns, ausgehend von der neueren Einsteinschen affinen Feldtheorie, zu einer Übertragung gelangt[8]), die durch folgende Gleichungen charakterisiert ist:

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \left\{ {\lambda\ \mu \atop \nu} \right\} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} i^\nu + \frac{1}{6} A^\nu_\lambda i_\mu + \frac{1}{6} A^\nu_\mu i_\lambda ,$$

$$\Gamma'^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu} [- A^\nu_\lambda S_\mu] ,$$

$$Q_\mu^{\lambda\nu} = -\frac{2}{3} A^{(\lambda}_\mu i^{\nu)} + \frac{1}{3} i_\mu g^{\lambda\nu} ,$$

$$Q'_{\mu\,\lambda\nu} = \frac{1}{3} g_{\mu\lambda} i_\nu + \frac{1}{3} g_{\mu\nu} i_\lambda - \frac{1}{3} i_\mu g_{\lambda\nu} [+ 2 S'_\mu g_{\lambda\nu}] .$$

[8]) J. A. Schouten, Over een niet symmetrische affine veldtheorie. Versl. Kon. Akad. v. Wetenschappen **32** (1923), S. 842–849; englisch: Proc. Kon. Akad. v. Wetenschappen **26** (1923), S. 850–857.

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den entsprechenden Einsteins
urch die vermittels [ ] angedeuteten Zusatzglieder. Die Schwierigkeit, daß
ein elektromagnetisches Feld möglich ist an Stellen, wo der Stromvektor i^ν
erschwindet, ist durch diese Zusatzglieder beseitigt. Die Übertragung ist,
ie ersichtlich, eine inzidenzinvariante und geodätisch einheitliche, es ist
$_\lambda = 0$ und $C_\lambda = S'_\lambda$. An Stellen, wo i^ν verschwindet, ist sie überdies
ovariant winkeltreu und kontravariant maßtreu. S'_λ hat die Bedeutung
es elektromagnetischen Potentialvektors. Infolge (22b) verhält sich S'_λ,
ie man das bei einem Potentialvektor wünscht: bei Änderung des ko-
arianten Maßes ändert sich nämlich S'_λ um einen Gradientvektor.

(Eingegangen am 12. Februar 1924.)

Über die automorphen Funktionen bei einer Klasse Jonquièresscher Gruppen zweier Veränderlichen.

Von

P. J. Myrberg in Helsingfors (Finnland).

1. Gegenstand der Untersuchung in der Theorie der automorphen Funktionen bilden die diskontinuierlichen Gruppen umkehrbar eindeutiger Transformationen und die bezüglichen invarianten (automorphen) Funktionen.

Während die linearen Transformationen

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \tag{1}$$

die einzigen für alle Werte der komplexen Variablen x umkehrbar eindeutigen rationalen Transformationen sind, gibt es im Falle mehrerer Variablen umkehrbar rationale oder sog. „Cremonatransformationen" jeder Ordnung. Die geometrische und gruppentheoretische Untersuchung der diskontinuierlichen Gruppen von Cremonatransformationen ist die erste zu lösende Aufgabe in der Theorie der automorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen.

Die Gesamtheit aller Cremonatransformationen eines Raumes R_m bildet eine kontinuierliche Gruppe. Diese enthält gewisse kontinuierliche Untergruppen, deren Substitutionen Cremonatransformationen beschränkter Ordnung sind, und die somit nur eine endliche Anzahl Parameter enthalten. Diese „endlichen kontinuierlichen Cremonagruppen" können als die nächste Verallgemeinerung der Kollineationsgruppen, die hierher als einfachster Spezialfall gehören, angesehen werden, und es ist daher natürlich, sich bei der Bildung von diskontinuierlichen Gruppen auf die Untergruppen der genannten Gruppen zunächst zu beschränken.

2. Die endlichen kontinuierlichen Cremonagruppen der Ebene sind alle bekannt. Es sind nach Enriques[1]) die folgenden:

[1]) *Sui gruppi continui di transformazioni cremoniane nel piano* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 2 (1° semestre 1893), S. 468–473].

I. Die achtgliedrige Kollineationsgruppe,

II. die sechsgliedrige Gruppe der quadratischen Transformationen mit wei festen Fundamentalpunkten,

III. die $(n+5)$-gliedrige „Jonquièressche Gruppe" der Transformationen n-ter Ordnung, welche ein Strahlenbüschel und zugleich ein ineares System von Kurven irgendeiner Ordnung, mit dem Mittelpunkte enes Strahlenbüschels als gemeinsamem $(n-1)$-fachen Punkte und mit benfalls gemeinsamen Tangenten in diesem Punkte, in sich überführen.

Zu den diskontinuierlichen Kollineationsgruppen gehören die Gruppen ler Abelschen Funktionen und die von Picard entdeckten Gruppen von inearen Substitutionen, die eine indefinite Hermitesche Form in sich iberführen (hyperfuchssche Gruppen). Die diskontinuierlichen Untergruppen ler zweiten Klasse können in die Gruppen der direkten Kreisverwandtchaften oder in die sog. hyperabelschen Gruppen transformiert werden, leren Theorie ebenfalls von Picard begründet ist.

Dagegen sind die Jonquièresschen Gruppen unseres Wissens bisher einer funktionentheoretischen Betrachtung unterzogen worden.

3. Die geometrische Theorie der Jonquièresschen Gruppen hat ausührlicher zuerst Mohrmann entwickelt[2]). Bei Zugrundelegung eines eeigneten homogenen Koordinatensystems nimmt die allgemeine Transormation der Jonquièresschen Gruppe n-ter Ordnung die Gestalt

$$2) \qquad \begin{cases} x_1' = c_0 x_1 x_3^{n-1} + c_1 x_2^n + c_2 x_2^{n-1} x_3 + \ldots + c_{n+1} x_3^n, \\ x_2' = (\alpha x_2 + \beta x_3)(\gamma x_2 + \delta x_3)^{n-1}, \\ x_3' = (\gamma x_2 + \delta x_3)^n \end{cases}$$

n, wo die $(n+6)$ Koeffizienten willkürliche Parameter sind. Wird

$$\frac{x_1}{x_3} = y, \qquad \frac{x_2}{x_3} = x$$

esetzt, so ergibt sich für dieselbe Transformation die nichthomogene Darellung

$$2)' \qquad x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad y' = \frac{c_0 y + c_1 x^n + c_2 x^{n-1} + \ldots + c_{n+1}}{(\gamma x + \delta)^n}.$$

ie enthält also $n+5$ wesentliche Parameter.

Im niedrigsten Falle $n=1$ reduziert sich (2) auf die ternäre lineare ransformation

$$3) \qquad \begin{cases} x_1' = c_0 x_1 + c_1 x_2 + c_2 x_3, \\ x_2' = \alpha x_2 + \beta x_3, \\ x_3' = \gamma x_2 + \delta x_3, \end{cases}$$

[2]) H. Mohrmann, *Über die automorphe Kollineationsgruppe des rationalen ormalkegels n-ter Ordnung.* (Rendic. del Circolo mat. di Palermo **31** (1911).)

und der entsprechende nichthomogene Ausdruck (2)′ lautet dann

$$(3)' \qquad x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad y' = \frac{c_0 y + c_1 x + c_2}{\gamma x + \delta}.$$

Das einfachste Beispiel von diskontinuierlichen Gruppen, deren Substitutionen dieser Art sind, hat man in der Gruppe

$$(4) \qquad \begin{cases} u' = u + a\omega_1 + b\omega_2, \\ \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \qquad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{cases}$$

der doppelperiodischen Funktionen von u mit den Perioden ω_1, ω_2, wobei die Koeffizienten alle ganzzahligen Werte durchlaufen, die der Bedingung

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1$$

genügen. Jede elliptische Funktion kann, als Funktion von u, ω_1, ω_2 betrachtet, als eine automorphe Form der homogenen Gruppe (4) angesehen werden. Insbesondere stellen die Formen 0-ter Dimension automorphe Funktionen der nichthomogenen Gruppe

$$(4)' \qquad x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad y' = \frac{y + ax + b}{\gamma x + \delta}$$

dar. Diejenigen unter diesen Formen, die von y unabhängig sind, reduzieren sich auf Modulfunktionen.

4. Man kann nun statt der Modulgruppe eine beliebige in der komplexen Ebene eigentlich diskontinuierliche Gruppe linearer Substitutionen (1) wählen und ihr ternäre Kollineationsgruppen (3) oder allgemeine Jonquièressche Gruppen (2) zuordnen. Man gelangt dadurch zu einer Klasse automorpher Funktionen, die in einer interessanten Beziehung zu den automorphen Funktionen einer Variablen stehen. Es ist u. a. mittels dieser Funktionen möglich, für gewisse Klassen linearer Differentialgleichungen die inversen Funktionen der Integralquotienten als eindeutige Funktionen darzustellen und somit dasjenige Inversionsproblem zu lösen, das für homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch die automorphen Funktionen einer komplexen Variablen gelöst wird.

Die zwei ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit sind geometrisch-gruppentheoretischen Betrachtungen gewidmet. Das Hauptziel dieser Untersuchungen ist die Bestimmung aller diskontinuierlichen Jonquièresschen Gruppen, deren zugeordnete Gruppen linearer Substitutionen (1) ebenfalls diskontinuierlich sind. Die funktionentheoretische Behandlung dieser Gruppen beginnt im dritten Kapitel, wo die Existenz automorpher

Funktionen bei den Jonquièresschen Gruppen nachgewiesen wird. Die letzten Kapitel behandeln die Frage nach der Abhängigkeit der automorphen Funktionen einer und derselben Gruppe voneinander, sowie die Aufstellung derjenigen linearen Differentialgleichungen, die nach dem Obigen mit den betrachteten automorphen Funktionen zusammenhängen.

I.

Die Jonquièresschen Gruppen n-ter Ordnung.

5. Bekanntlich[3]) kann jede endliche kontinuierliche Cremonagruppe in eine projektive Gruppe auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit eines im allgemeinen höheren Raumes transformiert werden. Diese „projektive Abbildung" wird bei der Jonquièresschen Gruppe n-ter Ordnung, d. h. bei der Gruppe sämtlicher Jonquièresschen Transformationen n-ter Ordnung $(2)'$ durch die Transformation

$$(5) \qquad z_0 = x_1 x_3^{n-1}, \quad z_1 = x_2^n, \quad z_2 = x_2^{n-1} x_3, \quad \ldots, \quad z_{n+1} = x_3^n$$

geleistet. Die Geometrie der Jonquièresschen Transformationen bekommt dadurch eine Interpretation als projektive Geometrie auf einem im Raume R_{n+1} gelegenen rationalen Normalkegel n-ter Ordnung, den man durch eine Matrizengleichung in der Form

$$(6) \qquad \left\| \begin{matrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_n \\ z_2 & z_3 & \ldots & z_{n+1} \end{matrix} \right\| = 0$$

darstellen kann, und der somit als Durchschnitt gewisser quadratischer Mannigfaltigkeiten auftritt.

Der Jonquièresschen Transformation (2) entspricht die Kollineation

$$(7) \qquad \begin{cases} z_0' = c_0 z_0 + c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_{n+1} z_{n+1} \\ z_1' = a_{1,1} z_1 + a_{1,2} z_2 + \ldots + a_{1,n+1} z_{n+1} \\ z_2' = a_{2,1} z_1 + a_{2,2} z_2 + \ldots + a_{2,n+1} z_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{n+1}' = a_{n+1,1} z_1 + a_{n+1,2} z_2 + \ldots + a_{n+1,n+1} z_{n+1}, \end{cases}$$

mit

$$(8) \qquad a_{i,\varkappa} = \frac{1}{(n-\varkappa+1)!} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial}{\partial \delta}\right)^{n-\varkappa+1} \beta^{n-i+1} \delta^{i-1},$$

die den Normalkegel (6) in sich selbst überführt. Die Determinante dieser Substitution ist gleich

$$(9) \qquad D = c_0 \left| \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix} \right|^{\frac{1}{2}(n+1)n}$$

[3]) Vgl. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften 3_1, Heft 2, S. 341.

und somit von Null verschieden, sobald dies von der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

und von c_0 gilt.

Im folgenden nehmen wir stets $\Delta = 1$ an und beschränken uns auf Transformationen (2) bzw. (2)′, wo $c_0 = 1$ ist. Nach (9) hat die Determinante der zugeordneten Kollineation (7) dann auch den Wert 1, weshalb wir die betreffenden Jonquièresschen Transformationen als „unimodular" bezeichnen wollen. Die Gesamtheit derselben bildet offenbar eine Gruppe. Diese „unimodulare Gruppe" soll als Grundlage unserer folgenden Betrachtungen dienen.

6. Zwischen den homogenen unimodularen Jonquièresschen Transformationen

$$(10) \qquad \begin{cases} x_1' = x_1 x_3^{n-1} + c_1 x_2^n + c_2 x_2^{n-1} x_3 + \ldots + c_{n+1} x_3^n, \\ x_2' = (\alpha x_2 + \beta x_3)(\gamma x_2 + \delta x_3)^{n-1}, \\ x_3' = (\gamma x_2 + \delta x_3)^n \end{cases}$$

und den nichthomogenen

$$(10)' \qquad x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad y' = \frac{y + c_1 x^n + c_2 x^{n-1} + \ldots + c_{n+1}}{(\gamma x + \delta)^n}$$

findet ersichtlich eine umkehrbar eindeutige Beziehung statt. Es wird daher bei den gruppentheoretischen Betrachtungen gleichgültig, ob wir bei der Bildung von Gruppen mit den homogenen oder nichthomogenen Transformationen operieren.

Nach dem Ausdruck (2)′ ist jeder Jonquièresschen Transformation in eindeutiger Weise eine lineare Transformation

$$(11) \qquad x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

zugeordnet. Somit entspricht jeder Gruppe Γ Jonquièresscher Transformationen (2) eine völlig bestimmte Gruppe g von Substitutionen (11). Es wird nun für das folgende ein- für allemal vorausgesetzt, daß g eine in der komplexen x-Ebene eigentlich diskontinuierliche Gruppe ist. Zu den hierdurch ausgeschlossenen Gruppen gehören die Gruppen der vierfachperiodischen Funktionen, die diskontinuierlich sind, ohne daß die zugeordnete Gruppe g eigentlich diskontinuierlich ist.

Aus (10) geht ferner hervor, daß jeder linearen Transformation (11) bei geradem n eine einzige Jonquièressche Transformation (10) mit beliebig gegebenen Koeffizienten (c) entspricht. Bei ungeradem n bleibt

dagegen durch Angabe von (11) im Ausdruck (10) von y' das Vorzeichen unbestimmt. Es ist aber leicht einzusehen, daß in diesem Falle zwischen den Transformationen (10) mit gegebenen Koeffizienten (c) und den homogenen linearen Transformationen

$$x_2' = \alpha x_2 + \beta x_3, \qquad x_3' = \gamma x_2 + \delta x_3 \tag{12}$$

eine umkehrbar eindeutige Zuordnung besteht.

Wir behaupten, daß es unter der über die Gruppe g gemachten Voraussetzung für die eigentliche Diskontinuität der Jonquièresschen Gruppe Γ im allgemeinen notwendig und hinreichend ist, daß sie mit g (bei geradem n) bzw. mit der Gruppe g' der homogenen Substitution (12) (bei ungeradem n) holoedrisch isomorph ist.

Es sei nämlich n zuerst eine gerade Zahl. Jeder Substitution $(10)'$ von Γ entspricht eine völlig bestimmte Substitution (11) von g. Wir behaupten, daß auch das Umgekehrte der Fall sein muß. In der Tat würden andernfalls der identischen Substitution von g Substitutionen von Γ der Form

$$x' = x, \qquad y' = y + \sum_{\nu=1}^{n+1} c_\nu x^{n-\nu+1}$$

mit nicht durchgehends verschwindenden Koeffizienten (c) entsprechen, was nur bei den einfach- oder doppeltperiodischen Gruppen möglich ist. Von diesen speziellen Fällen abgesehen, sind also die Gruppen Γ und g holoedrisch isomorph.

In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß bei ungeradem n zwischen Γ und g' ein holoedrischer Isomorphismus im allgemeinen stattfinden muß.

Die gruppentheoretische Seite unserer Betrachtungen reduziert sich nach dem obigen auf die Lösung des folgenden Problems:

Die Gesamtheit der zu irgendeiner diskontinuierlichen Gruppe g bzw. g' holoedrisch isomorphen Jonquièresschen Gruppen zu finden.

II.

Bildung von diskontinuierlichen Jonquièresschen Gruppen.

7. Es sei g eine beliebige in der komplexen x-Ebene eigentlich diskontinuierliche Gruppe linearer Substitutionen

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \tag{13}$$

und

$$S_1, S_2, \ldots, S_\nu \tag{14}$$

ihre erzeugenden Substitutionen, deren Anzahl also als endlich vorausgesetzt wird. Die Zusammensetzung dieser Gruppe wird vollständig durch gewisse fundamentale Relationen

$$S_{i_1}^{\lambda_1} S_{i_2}^{\lambda_2} \dots S_{i_\varkappa}^{\lambda_\varkappa} = 1 \tag{15}$$

charakterisiert, die ein System voneinander unabhängiger Beziehungen zwischen den Substitutionen (14) darstellen, aus welchen alle anderen Relationen gefolgert werden können.

Jeder linearen Substitution (13) entsprechen allgemein zwei unimodulare homogene lineare Substitutionen, nämlich

$$x_2' = \alpha x_2 + \beta x_3, \qquad x_3' = \gamma x_2 + \delta x_3 \tag{16}$$

und

$$x_2' = -\alpha x_2 - \beta x_3, \qquad x_3' = -\gamma x_2 - \delta x_3. \tag{16'}$$

Wir denken uns von jedem zu den Substitutionen (14) entsprechenden Paar (16), (16)′ je eine Substitution irgendwie ausgewählt. Die so erhaltenen Substitutionen

$$T_1, T_2, \dots, T_p \tag{17}$$

erzeugen eine homogene Gruppe g', die im allgemeinen zur Gruppe g zweieindeutig homomorph ist. Speziell sind der identischen Substitution von g die beiden Substitutionen

$$\begin{cases} x_2' = x_2, & x_3' = x_3 \quad (T = +1), \\ x_2' = -x_2, & x_3' = -x_3 \quad (T = -1) \end{cases} \tag{18}$$

zugeordnet. Den Relationen (15) entsprechen somit Relationen der Form

$$T_{i_1}^{\lambda_1} T_{i_2}^{\lambda_2} \dots T_{i_\varkappa}^{\lambda_\varkappa} = 1 \tag{19}$$

bzw.

$$T_{i_1}^{\lambda_1} T_{i_2}^{\lambda_2} \dots T_{i_\varkappa}^{\lambda_\varkappa} = -1 \tag{19'}$$

zwischen den erzeugenden Substitutionen von g'.

Wir ordnen jetzt jeder erzeugenden Substitution (17) von g' je eine Jonquièressche Transformation (10)′ mit zunächst unbestimmten Koeffizienten (c) zu. Die von diesen Jonquièresschen Substitutionen

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_p \tag{20}$$

erzeugte Gruppe Γ ist im allgemeinen mit g bzw. g' nicht holoedrisch isomorph. Unsere nächste Aufgabe ist die Aufstellung derjenigen Bedingungen für die Koeffizienten (c) in den Substitutionen (20), die zum

holoedrischen Isomorphismus von Γ und g bzw. g' notwendig und hinreichend sind. Die Lösung der Aufgabe hängt wesentlich davon ab, ob die Ordnung n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

A. Gruppen gerader Ordnung.

8. Wir denken uns die Gesamtheit der Gleichungen

$$\Sigma_{i_1}^{\lambda_1} \Sigma_{i_2}^{\lambda_2} \dots \Sigma_{i_\varkappa}^{\lambda_\varkappa} = 1 \tag{21}$$

aufgeschrieben, die den verschiedenen fundamentalen Relationen (15) von g entsprechen.

Die linken Seiten von (21) sind Jonquièressche Transformationen, deren Koeffizienten (c) sich aus denjenigen der erzeugenden Substitutionen linear und homogen zusammensetzen. Diese Koeffizienten geben gleich Null gesetzt ein System linearer homogenen Gleichungen zwischen den Koeffizienten (c) von (20). Jedes System von Substitutionen (20), die mit Berücksichtigung jener Gleichungen gebildet wird, erzeugt eine Jonquièressche Gruppe, die mit g holoedrisch isomorph ist.

9. Wir wollen unsere Ergebnisse mit einigen Beispielen erläutern.

I. Beispiel. Den einfachsten Fall bilden diejenigen Gruppen g, bei welchen es keine anderen Relationen zwischen den Substitutionen gibt außer denjenigen, die sich unmittelbar auf die Identitäten $SS^{-1} = 1$ zurückführen lassen. Bei diesen Gruppen sind die Koeffizienten (c) der erzeugenden Substitutionen (20) keinerlei Bedingungen unterworfen.

Hierher gehören die Gruppen mit einem Kreisbereich als Fundamentalbereich, deren Randkreise aufeinander paarweise durch loxodromische oder hyperbolische Substitutionen derart bezogen sind, daß die Innen- und Außengebiete einander wechselweise entsprechen (die Gruppen des Schottkyschen Typus); ferner die Grenzfälle dieser Gruppen, die entstehen, wenn die Randkreise des Fundamentalbereichs einander berühren, wobei auch parabolische Substitutionen auftreten werden.

II. Beispiel. Wir gehen von irgendeinem Kreisbereich (oder von einer Ausartung desselben) aus und ordnen einige unter den Randkreisen nach der im ersten Beispiel angegebenen Weise mittels loxodromischer oder hyperbolischer (bzw. parabolischer) Substitutionen

$$S_1, S_2, \dots, S_p \tag{22}$$

einander paarweise zu, während wir jedem der übrigen Kreise je eine involutorische Substitution

$$S_{p+1}, \; S_{p+2}, \; \dots, \; S_{p+q} \tag{22'}$$

zuordnen, die das Äußere und Innere des betreffenden Kreises miteinander vertauscht.

Die $p+q$ Substitutionen (22) und (22)′ erzeugen eine diskontinuierliche Gruppe g, die den genannten Kreisbereich zum Fundamentalbereich hat und die sich für $q=0$ auf eine Gruppe der im ersten Beispiel betrachteten Art reduziert.

Die fundamentalen Relationen von g sind offenbar

$$S_{p+1}^2=1,\quad S_{p+2}^2=1,\quad \ldots,\quad S_{p+q}^2=1. \tag{23}$$

Es sei nun

$$\Sigma_\nu\quad\begin{cases} x_1'=x_3^{2\varkappa-1}x_1+c_1x_2^{2\varkappa}+c_2x_2^{2\varkappa-1}x_3+\ldots+c_{2\varkappa+1}x_2^{2\varkappa},\\ x_2'=(\alpha x_2+\beta x_3)(\gamma x_2-\alpha x_3)^{2\varkappa-1}\\ x_3'=(\gamma x_2-\alpha x_3)^{2\varkappa}\end{cases}$$

der allgemeine Ausdruck der zu irgendeiner Substitution S_ν der Reihe (22)′ entsprechenden Jonquièresschen Substitution $(2\varkappa)$-ter Ordnung. Zur Bildung der Gleichung

$$\Sigma_\nu^2=1 \tag{24}$$

wählen wir der Kürze halber

$$T_\nu:\qquad x'=-\frac{1}{x},$$

also $\alpha=0$, $\beta=-1$, $\gamma=1$, $\delta=0$, und wir erhalten für Σ_ν^2 den Ausdruck

$$\Sigma_\nu^2\quad\begin{cases} x_1'=x_3^{2\varkappa-1}x_1+(c_1+c_{2\varkappa+1})x_2^{2\varkappa}+(c_2-c_{2\varkappa})x_2^{2\varkappa-1}x_3\\ \qquad+(c_3+c_{2\varkappa-1})x_2^{2\varkappa-2}x_3^2+\ldots+(c_{2\varkappa+1}+c_1)x_3^{2\varkappa};\\ x_2'=x_2x_3^{2\varkappa-1},\qquad x_3'=x_3^{2\varkappa}.\end{cases}$$

Die Bedingung (24) liefert dann die Gleichungen

$$c_\mu+(-1)^{\mu+1}c_{2\varkappa+2-\mu}=0\qquad(\mu=1,2,\ldots,\varkappa). \tag{25}$$

In allen Substitutionen Σ_ν, die den involutorischen Substitutionen (22)′ zugeordnet werden, bleiben daher $\varkappa+1$ bzw. $\varkappa$ Parameter (c) willkürlich[4]), was insgesamt $(\varkappa+1)q$ bzw. $\varkappa q$ Parameter gibt. Mit den $(2\varkappa+1)p$ Parametern der übrigen erzeugenden Substitutionen wird die Jonquièressche Gruppe insgesamt

$$(2\varkappa+1)p+(\varkappa+1)q\quad\text{bzw.}\quad(2\varkappa+1)p+\varkappa q$$

willkürliche Parameter (c) enthalten.

[4]) Je nachdem $\varkappa$ ungerade oder gerade ist.

III. Beispiel. Als letztes Beispiel betrachten wir die Modulgruppe. Es seien

$$S_1: \quad x' = x + 1$$

$$S_2: \quad x' = -\frac{1}{x}$$

ie beiden erzeugenden Substitutionen der Modulgruppe. Die fundamenalen Relationen sind dann

26) $$S_2^2 = 1, \quad (S_1 S_2)^3 = 1.$$

Wir beschränken uns der Kürze halber auf den Fall der quadratischen onquièresschen Transformationen: $\varkappa = 1$.

Es seien

$$\Sigma_1 \begin{cases} x_1' = x_3 x_1 + a_1 x_2^2 + b_1 x_2 x_3 + c_1 x_3^2, \\ x_2' = (x_2 + x_3) x_3, \quad x_3' = x_3^2; \end{cases}$$

$$\Sigma_2 \begin{cases} x_1' = x_3 x_1 + a_2 x_2^2 + b_2 x_2 x_3 + c_2 x_3^2, \\ x_2' = -x_2 x_3, \quad x_3' = x_2^2 \end{cases}$$

lie den Substitutionen S_1 bzw. S_2 entsprechenden Substitutionen von Γ. Nach dem zweiten Beispiel liefert die erste der Bedingungen (26) die einzige Gleichung

27) $$a_2 + c_2 = 0.$$

Wir bilden ferner die Substitution

$$\Sigma_1 \Sigma_2 \begin{cases} x_1' = x_3 x_1 + (a_1 + a_2) x_2^2 + (2 a_2 + b_1 + b_2) x_2 x_3 + (b_2 + c_1) x_3^2; \\ x_2' = -(x_2 + x_3) x_3, \quad x_3' = (x_2 + x_3)^2 \end{cases}$$

und daraus

$$(\Sigma_1 \Sigma_2)^3 \begin{cases} x_1' = x_3 x_1 + (2 a_1 - b_1 + b_2 + 2 c_1)(x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2); \\ x_2' = x_2 x_3, \quad x_3' = x_3^2. \end{cases}$$

Diese letztere Substitution reduziert sich auf die Identität unter der Bedingung

28) $$2 a_1 - b_1 + b_2 + 2 c_1 = 0.$$

Die Gleichungen (27) und (28) drücken im vorliegenden Falle die zum holoedrischen Isomorphismus von g und Γ notwendigen und hinreichenden Bedingungen aus.

B. Gruppen ungerader Ordnung.

10. Nach Nr. 6 ist es für die eigentliche Diskontinuität einer Jonquièresschen Gruppe ungerader Ordnung im allgemeinen notwendig und hinreichend, daß sie mit der zugeordneten (als eigentlich diskontinuierlich vorausgesetzten) homogenen linearen Gruppe g' isomorph ist.

Es seien

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_p \tag{29}$$

die den homogenen linearen Substitutionen (17) entsprechenden Jonquières schen Transformationen irgendeiner ungeraden Ordnung mit zunächst un bestimmten Koeffizienten (c).

Wir stellen die Gesamtheit der Gleichungen

$$\Sigma_{i_1}^{\lambda_1} \Sigma_{i_2}^{\lambda_2} \ldots \Sigma_{i_\varkappa}^{\lambda_\varkappa} = 1 \tag{30}$$

auf, die den verschiedenen Relationen (19) der homogenen Gruppe g entsprechen. Das so erhaltene System homogener linearer Gleichunge bildet die erste Gruppe der Bedingungen für die Koeffizienten (c) von (29).

Wir bilden ferner die Gesamtheit der Substitutionen von Γ:

$$\Pi_\nu = \Pi_\nu(\Sigma_{i_q}^{\lambda_q}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s) \tag{31}$$

die den linken Seiten der verschiedenen Gleichungen $(19)'$ entsprechen Wir schreiben

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \ldots = \Pi_s \tag{32}$$

und erhalten eine zweite Gruppe von Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten (c), die von der ersten Gruppe im allgemeinen unabhängig ist Damit ist jedoch die Gesamtheit der erforderlichen Bedingungen im allgemeinen noch nicht erschöpft. Vielmehr hat man noch eine dritte Gruppe hinzuzufügen, deren Gleichungen ausdrücken, daß jede der Substitutionen Π mit jeder Substitution von Γ vertauschbar ist. Wegen (32) braucht ma nur die Gleichungen

$$\Sigma_\mu \Pi_\nu = \Pi_\nu \Sigma_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p) \tag{33}$$

zu schreiben, wo Σ_μ die erzeugenden Substitutionen von Γ durchläuft und Π_ν irgendeine der Substitutionen (31) ist.

Wir behaupten, daß die Bedingungen (30), (32) und (33) für die holoedrische Isomorphie von Γ und g' nicht nur notwendig, was ersichtlich ist, sondern auch hinreichend sind.

Es sei nämlich

$$T_{i_1}^{l_1} T_{i_2}^{l_2} \ldots T_{i_q}^{l_q} = 1 \tag{34}$$

eine beliebige Relation zwischen den Substitutionen von g'. Nach Berücksichtigung der Identitäten $TT^{-1} = 1$ läßt sich die linke Seite von (34 als Produkt der Substitution von der Form

$$T^{-1}(T)_{+1}T \quad \text{und} \quad T^{-1}(T)_{-1}T$$

darstellen, wo $(T)_{+1}$ und $(T)_{-1}$ die linken Seiten von (19) bzw. (19) bezeichnen.

Wir zerlegen nun die zugeordnete Substitution von

5) $$\Sigma_{i_1}^{l_1}\Sigma_{i_2}^{l_2}\dots\Sigma_{i_q}^{l_q}$$

entsprechender Weise in Faktoren der Form

$$\Sigma^{-1}(\Sigma)_{+1}\Sigma \quad \text{und} \quad \Sigma^{-1}(\Sigma)_{-1}\Sigma.$$

lle Faktoren erster Art reduzieren sich wegen (30) und der Identitäten $\Sigma^{-1}=1$ auf die identische Substitution. Weil ferner jeder Faktor der letzren Art nach den Bedingungen der dritten Art (33) mit jeder erzeugenden ıbstitution und daher mit jeder Substitution von Γ vertauschbar ist, so ird nach der ausgeführten Reduktion die Substitution (35) als Produkt er Substitutionen

$$(\Sigma)_{-1}=\Pi_\nu$$

argestellt, deren Anzahl dabei gerade ist. Dieses Produkt reduziert sich chließlich wegen der Bedingungen (32) auf die Identität.

Somit entspricht jeder Relation (34) zwischen den Substitutionen on g' eine solche Relation zwischen den zugeordneten Substitutionen von Γ. as Umgekehrte findet offenbar statt.

Die Gruppen g' und Γ sind daher holoedrisch isomorph.

11. Wir betrachten noch einige Beispiele.

I. Beispiel. Das in Nr. 9 betrachtete erste Beispiel kann auch hier ngewandt werden. Es sind dabei die Koeffizienten (c) der erzeugenden ıbstitutionen keinerlei Bedingungen unterworfen.

II. Beispiel. Das in Nr. 9 betrachtete II. Beispiel führt hier zu den lgenden, von den dortigen ganz abweichenden Resultaten.

Es seien

36) $$T_1,\quad T_2,\quad \dots,\quad T_p$$

nd

36)′ $$T_{p+1},\quad T_{p+2},\quad \dots,\quad T_{p+q}$$

gendwie gewählte Systeme von den Substitutionen (22) bzw. (22)′ entprechenden homogenen Substitutionen.

Den Relationen (23) entsprechen die Relationen

37) $$T_\nu^2=-1 \qquad (\nu=p+1,\dots,p+q).$$

ie Bedingungen der ersten Art (30) fehlen also im vorliegenden Falle. ie der zweiten Art (32) bestehen aus den Gleichungen

38) $$\Sigma_{p+1}^2=\Sigma_{p+2}^2=\dots=\Sigma_{p+q}^2.$$

Die dritte Gruppe der Bedingungen (33) reduziert sich dann auf die leichungen

39) $$\Sigma_\nu\Sigma_{p+1}^2=\Sigma_{p+1}^2\Sigma_\nu \qquad (\nu=1,2,\dots,p),$$

indem die zu den übrigen erzeugenden Substitutionen $\Sigma_{p+2}, \ldots, \Sigma_{p+}$ gehörigen Gleichungen wegen (38) von sich selbst erfüllt sind.

Es sei nun allgemein

$$\Sigma_\nu \begin{cases} x_1' = x_3^{2\varkappa} x_1 + c_1 x_2^{2\varkappa+1} + c_2 x_2^{2\varkappa} x_3 + \ldots + c_{2\varkappa+2} x_3^{2\varkappa+1}, \\ x_2' = (\alpha x_2 + \beta x_3)(\gamma x_2 - \alpha x_3)^{2\varkappa}, \\ x_3' = (\gamma x_2 - \alpha x_3)^{2\varkappa+1} \end{cases}$$

der Ausdruck irgendeiner der involutorischen Substitutionen $\Sigma_{p+1}, \ldots, \Sigma_{p+}$. Dann ist

$$\Sigma_\nu^2 \begin{cases} x_1' = -\{x_3^{2\varkappa} x_1 + c_1 x_2^{2\varkappa+1} + c_2 x_2^{2\varkappa} x_3 + \ldots + c_{2\varkappa+2} x_3^{2\varkappa+1} \\ \qquad + c_1(\alpha x_2 + \beta x_3)^{2\varkappa+1} + c_2(\alpha x_2 + \beta x_3)^{2\varkappa}(\gamma x_2 - \alpha x_3 \\ \qquad + \ldots + c_{2\varkappa+2}(\gamma x_2 - \alpha x_3)^{2\varkappa+1}\}, \\ x_2' = x_2 x_3^{2\varkappa}, \quad x_3'' = x_3^{2\varkappa+1}. \end{cases}$$

Die Bedingungen (38) können dann durch das Gleichungssystem

$$(39)' \quad \begin{cases} c_1(1+\alpha^{2\varkappa+1}) + c_2\alpha^{2\varkappa}\gamma + \ldots + c_{2\varkappa+2}\gamma^{2\varkappa+1} = d_1, \\ c_1\beta^{2\varkappa+1} - c_2\beta^{2\varkappa}\alpha + \ldots + c_{2\varkappa+2}(1-\alpha^{2\varkappa+1}) = d_{2\varkappa+2} \end{cases}$$

ersetzt werden, wo $d_1, \ldots, d_{2\varkappa+2}$ willkürliche Konstanten bezeichnen. Di Auflösung dieses Gleichungssystems nach $c_1, \ldots, c_{2\varkappa+2}$ ist stets ausführbar indem die Determinante ihrer Koeffizienten $= 2^{\varkappa+1}$ und somit $\neq 0$ ist Die involutorischen erzeugenden Substitutionen von Γ hängen daher nu von den $2\varkappa+2$ Parametern $d_1, \ldots, d_{2\varkappa+2}$ ab.

Es sei ferner

$$\Sigma_\mu \begin{cases} x_1' = x_3^{2\varkappa+1} x_1 + \bar{c}_1 x_2^{2\varkappa+1} + \ldots + \bar{c}_{2\varkappa+2}, \\ x_2' = (\bar{\alpha} x_2 + \bar{\beta} x_3)(\bar{\gamma} x_2 + \bar{\delta} x_3)^{2\varkappa}, \quad x_3' = (\bar{\gamma} x_2 + \bar{\delta} x_3)^{2\varkappa+1} \end{cases}$$

der allgemeine Ausdruck irgendeiner der Substitutionen $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_p$. Hierau und aus dem Ausdruck der Substitutionen Σ_ν^2 $(\nu = p+1, \ldots, p+q)$,

$$\Sigma_\nu^2 \begin{cases} x_1' = -\{x_3^{2\varkappa+1} x_1 + d_1 x_2^{2\varkappa+1} + \ldots + d_{2\varkappa+2} x_3^{2\varkappa+1}\}, \\ x_2' = x_2 x_3^{2\varkappa}, \quad x_3' = x_3^{2\varkappa+1} \end{cases}$$

ergibt sich

$$\Sigma_\mu \Sigma_\nu^2 \begin{cases} x_1' = -\{x_3^{2\varkappa} x_1 + \bar{c}_1 x_2^{2\varkappa+1} + \ldots + \bar{c}_{2\varkappa+2} x_3^{2\varkappa+1} \\ \qquad + d_1(\bar{\alpha} x_2 + \bar{\beta} x_3)^{2\varkappa+1} + \ldots + d_{2\varkappa+2}(\bar{\gamma} x_2 + \bar{\delta} x_3)^{2\varkappa+1}\} \\ x_2' = \ldots, \quad x_3' = \ldots \end{cases}$$

und

$$\Sigma_\nu^2 \Sigma_\mu \begin{cases} x_1' = -\{x_3^{2\varkappa} x_1 + d_1 x_2^{2\varkappa+1} + \ldots + d_{2\varkappa+2} x_3^{2\varkappa+1} \\ \qquad - \bar{c}_1 x_2^{2\varkappa+1} - \ldots - \bar{c}_{2\varkappa+2} x_3^{2\varkappa+1}\}; \\ x_2' = \ldots, \quad x_3' = \ldots. \end{cases}$$

Die Gleichheit dieser beiden letzteren Substitutionen liefert $2\varkappa + 2$ eichungen, welche die Koeffizienten $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_{2\varkappa+2}$ als Funktionen von $, \ldots, d_{2\varkappa+2}$ und den Koeffizienten $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}$ ausdrücken.

Somit hängt die Gruppe Γ außer den Koeffizienten von g', nur noch n den $2\varkappa + 2$ Parametern $d_1, d_2, \ldots, d_{2\varkappa+2}$ ab, deren Anzahl nur von r Ordnung der Substitutionen von Γ, nicht aber von der Anzahl ihrer zeugenden Substitutionen abhängt.

III. Beispiel. Als letztes Beispiel betrachten wir die Modulgruppe. Als erzeugende Substitutionen der homogenen Gruppe g' wählen wir

$$T_1: \quad x_2' = x_2 + x_3, \quad x_3' = x_3$$
$$T_2: \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = -x_2.$$

Die Relationen (19) und (19)′ lauten dann

$$(T_1 T_2)^3 = 1, \quad T_2^2 = -1.$$

er Kürze halber beschränken wir uns auf die Jonquièresschen Gruppen ster Ordnung.

Es seien

$$\Sigma_1: \quad x_1' = x_1 + c_1 x_2 + c_2 x_3; \quad x_2' = x_2 + x_3, \quad x_3' = x_3;$$
$$\Sigma_2: \quad x_1' = x_1 + d_1 x_2 + d_2 x_3, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = -x_2$$

e Ausdrücke der beiden erzeugenden Substitutionen von Γ. Die Relaonen (30) reduzieren sich auf die Gleichung

$$(\Sigma_1 \Sigma_2)^3 = 1,$$

e zu keiner Bedingungsgleichung führt, indem sie identisch gilt. Die edingungen zweiter Art (32) sind im vorliegenden Falle nicht vorhanden. ie einzige Gleichung dritter Art (33), die nicht identisch erfüllt ist, lautet

$$\Sigma_1 \Sigma_2^2 = \Sigma_2^2 \Sigma_1.$$

an hat

$$\Sigma_1 \Sigma_2^2 \quad \begin{cases} x_1' = x_1 + (c_1 + d_1 - d_2) x_2 + (c_2 + 2 d_1) x_3, \\ x_2' = \ldots, \quad x_3' = \ldots \end{cases}$$

nd

$$\Sigma_2^2 \Sigma_1 \quad \begin{cases} x_1' = x_1 + (-c_1 + d_1 - d_2) x_2 + (-c_1 - c_2 + d_1 + d_2) x_3; \\ x_2' = \ldots, \quad x_3' = \ldots \end{cases}$$

nd daraus durch Koeffizientenvergleichung

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{d_2 - d_1}{2}.$$

Die Gruppe Γ enthält also zwei unbestimmte Parameter.

III.

Automorphe Funktionen der Jonquièresschen Gruppen.

12. Indem wir jetzt zur funktionentheoretischen Seite unserer Betrachtungen übergehen, wollen wir zunächst untersuchen, ob eine diskontinuierliche Jonquièressche Gruppe Γ der in den vorigen Kapiteln betrachteten Art automorphe Funktionen besitzt. Unter automorphen Funktionen werden dabei (eindeutige) analytische Funktionen verstanden, die sich den Substitutionen der gegebenen Gruppe gegenüber invariant verhalten, und deren wesentliche Singularitäten von der Gruppe allein, nicht von der Funktion selbst, abhängen[5]).

Wir werden die Existenz automorpher Funktionen zunächst für den speziellen Fall nachweisen, wo g eine Gruppe des Schottkyschen Typus ist. Dabei müssen wir gewisse geometrische Betrachtungen vorausschicken.

13. Es sei $P(x, y)$ irgendein Punkt des vierdimensionalen Raumes R_2 der komplexen Variablen x, y. Ferner sei

$$(\sigma) \qquad \Sigma_{(1)}, \ \Sigma_{(2)}, \ \ldots$$

eine beliebige unendliche Folge von Substitutionen der Gruppe Γ. Die Transformierten des Punktes P vermittels (σ)

$$(40) \qquad P_1(x_1, y_1), \quad P_2(x_2, y_2), \quad \ldots$$

sind in unendlicher Anzahl vorhanden, und besitzen daher einen oder mehrere Häufungspunkte. Es ist nun für das Folgende von Wichtigkeit zu untersuchen, wie die genannten Häufungspunkte gelegen sind, und wann insbesondere die Lage dieser Häufungspunkte von dem Ausgangspunkt P unabhängig ist.

Es seien

$$(41) \qquad K_1, \ K_2, \ \ldots, \ K_{2p}$$

die paarweise einander zugeordneten Randkreise des Fundamentalbereichs von g. Es sei allgemein

$$(42) \qquad S_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p$$

diejenige (loxodromische oder hyperbolische) Substitutionen von g, die das Innere bzw. Äußere von $K_{\nu+p}$ auf das Äußere bzw. Innere von K_ν abbilden und es sei

$$(42)' \qquad S_{\nu+p} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p$$

die inverse Substitution von (42).

[5]) Wegen der Definition der automorphen Funktionen vgl. die Arbeit des Verfassers: *Über die Singularitäten der automorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen* (Vortrag vor dem V. skandinavischen Mathematikerkongreß in Helsingfors (1922)).

Wir untersuchen die Häufung der Transformierten von $P(x, y)$ zunächst nter der Voraussetzung, daß x demjenigen Fundamentalbereich von g ngehört, der den Punkt $x = \infty$ in seinem Innern enthält, und daß y ndlich ist.

14. Es sei allgemein

$$S_{(\mu)} = S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_\mu}$$

er Ausdruck der zu $\Sigma_{(\mu)}$ entsprechenden Substitution von g, wobei $S_{i_{\nu+1}} \neq S_i^{-1}$ ist. Wir zerlegen $S_{(\mu)}$ zunächst irgendwie in zwei Faktoren $S_{(\mu)} = U\ V_s$, wo $r + s = \mu$ und

$$U_r = S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}, \qquad V_s = S_{i_{r+1}} \dots S_{i_{r+s}} = \frac{\alpha^{(s)} x + \beta^{(s)}}{\gamma^{(s)} x + \delta^{(s)}}$$

st. Die Punkte

$$x_r = U_r(x), \qquad -\frac{\delta^{(s)}}{\gamma^{(s)}} = V_s^{-1}(\infty)$$

iegen bzw. im Inneren der Kreise K_{i_r} und $K_{i_{r+1}+p}$, die nicht identisch ind, und es ist daher

$$\left| x_r + \frac{\delta^{(s)}}{\gamma^{(s)}} \right| \geqq \Delta, \tag{43}$$

venn mit Δ der kürzeste Abstand zweier Kreise K_ν voneinander beeichnet wird.

Nun ist nach (10)′

$$y_{r+s} = \frac{y_r}{(\gamma^{(s)} x_r + \delta^{(s)})^n} + \frac{\sum_{\nu=1}^{n+1} c_\nu^{(s)} x_r^{n-\nu+1}}{(\gamma^{(s)} x_r + \delta^{(s)})^n}. \tag{44}$$

Wegen der Konvergenz der Reihe $\Sigma |\gamma|^{-p}$ für hinreichend großes p [6]) äßt sich s_0 so groß wählen, daß für $s_0 \geqq s$: $\dfrac{1}{\Delta^n |\gamma^{(s)}|^n} < \eta < 1$ wird und ies für alle Substitutionen V_s.

Weil ferner alle Punkte x_ν $(\nu = 1, 2, 3, \dots)$ innerhalb der Kreise (41) iegen, so ist

$$|x_\nu| \leqq \varrho \qquad (\nu = 1, 2, 3, \dots), \tag{45}$$

vo ϱ den Radius des kleinsten um den Nullpunkt beschriebenen Kreises ezeichnet, der alle Kreise K_ν umschließt.

Es sei ω das Maximum der für alle möglichen Substitutionen V_{s_0} ebildeten Ausdrücke $\sum_{\nu=1}^{n+1} |c_\nu^{(s_0)}| \varrho^{n-\nu+1}$.

---

[6]) Es ist leicht einzusehen, daß die Reihe $\Sigma \gamma^{-p}$ und die Poincaréschen eihen des Index p von g gleichzeitig absolut konvergieren.

Aus (44) erhält man dann die Ungleichung

$$|y_{r+s_0}| \leqq \frac{|y_r|}{\Delta^n |\gamma^{(s_0)}|^n} + \frac{\sum_{\nu=1}^{n+1} |c_\nu^{(s_0)}| \varrho^{n-\nu+1}}{\Delta^n |\gamma^{(s_0)}|^n}. \tag{46}$$

Daraus ergibt sich für alle Substitutionen U_r und V_{s_0} die Ungleichung

$$|y_{r+s_0}| < \eta(|y_r| + \omega),$$

woraus

$$|y_{r+p s_0}| \leqq \eta^p |y_r| + \frac{\eta}{1-\eta}(1-\eta^p)\omega \tag{47}$$

für $r \geqq 1$ erhalten wird. Die y-Koordinaten der Häufungspunkte (x_∞, y_∞) von (40) genügen daher der Ungleichung

$$|y_\infty| \leqq \frac{\eta}{1-\eta}\omega, \tag{48}$$

wo rechts eine vom Anfangspunkte unabhängige Konstante auftritt, wenigstens sobald x ein Punkt des Fundamentalbereichs von g und y endlich ist. Weil nun aber irgend zwei bezüglich Γ äquivalente Punkte stets dieselben Häufungspunkte für ihre Transformierten haben, so ist durch das Obige bewiesen worden, daß die Ungleichung (48) für die Gesamtheit der Häufungspunkte gültig ist, sobald die x-Koordinate des Anfangspunktes einen nichtsingulären Punkt von g repräsentiert und y endlich ist.

15. Wir untersuchen jetzt das Verhalten der Koeffizienten der Substitutionen $\Sigma_{(\nu)}$ bei $\nu \to \infty$.

Wir bilden die Quotienten

$$d_\varkappa = c_\varkappa : \binom{n}{\varkappa} \gamma^{n-\varkappa+1} \delta^{\varkappa-1} \tag{49}$$

und betrachten eine beliebige Teilfolge $(\sigma)'$ von (σ), für welche sämtliche Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} d_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{50}$$

sowie die Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} c_i : c_j, \quad \lim_{\nu=\infty} \gamma : \delta \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n+1)$$

existieren. Wir behaupten, daß alle Grenzwerte (49) einander gleich sind. In der Tat konnte man im entgegengesetzten Falle aus $(10)'$ durch Grenzübergang $\nu = \infty$ in der Reihe $(\sigma)'$ einen Ausdruck der Form $\lim_{\nu=\infty} y_\nu = R(x)$ erhalten, wo $R(x)$ eine rationale Funktion bezeichnet, die sich nicht auf eine Konstante reduziert. Weil nun die singulären Punkte von g keinen zweidimensionalen Bereich ausfüllen, so könnte man einen nichtsingulären Punkt x in der Nähe eines Poles von $R(x)$ derart wählen, daß $\lim_{\nu=\infty} |y_\nu|$ beliebig groß würde, was der oben bewiesenen Ungleichung (48) widerspricht.

Somit bleibt nur die Möglichkeit übrig, daß alle Grenzwerte (50) für lle Substitutionenfolgen stets miteinander gleich sind. Es sei dann d ihr gemeinsamer Wert bei irgendeiner Substitutionenfolge. Dann wird nach 10)′ für diese Folge von x und y unabhängig

$$\lim_{\nu=\infty} y_\nu = d.$$

Diese Beziehung besteht gleichmäßig in jedem endlichen Bereich B, der von den Geraden $x = x_\infty$ einen von Null verschiedenen Abstand hat, weil die Häufungspunkte der Punkte $x = -\frac{\delta}{\gamma}$ mit den singulären Punkten x_∞ von g zusammenfallen. Aus

$$x' = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2\left(x+\frac{\delta}{\gamma}\right)}$$

ergibt sich in gleicher Weise die Gleichung

$$\lim_{\nu=\infty} x_\nu = \lim_{\nu=\infty} \frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu} = x_\infty$$

gleichmäßig in B.

Wir können nach dem Obigen den folgenden Satz aussprechen:

Satz. *Die Transformierten der Punkte jedes endlichen Bereichs, welcher von den Geraden $x = x_\infty$ einen von Null verschiedenen Abstand hat, mittels einer beliebigen unendlichen Folge der Substitutionen von Γ häufen sich gleichmäßig nach den Punkten (x_∞, y_∞), deren x-Koordinate einem singulären Punkt von g entspricht, und deren y-Koordinate der Ungleichung (48) genügt.*

Die abgeschlossene Menge der für alle möglichen Folgen von Γ erhaltenen Häufungspunkte werden wir im folgenden mit (m) bezeichnen.

16. Die Existenz automorpher Funktionen bei Gruppen Γ kann man jetzt mittels Poincaréschen Reihen nachweisen.

Wir betrachten die Poincarésche Reihe

51) $$\Theta(x, y) = \Sigma H(x', y')(\gamma x + \delta)^{-p},$$

wo H eine rationale Funktion bezeichnet, die in den Punkten (m) endlich bleibt und wo (x', y') die Substitutionen der Gruppe Γ durchläuft. Wir behaupten, daß diese Reihe für hinreichend großes p in jedem endlichen Bereich B von R_2, welcher von den Geraden $x = x_\infty$, wo x_∞ die Affixen der singulären Punkte von g durchläuft, einen endlichen von Null verschiedenen Abstand hat, wenigstens nach Fortlassung von endlich vielen

Gliedern, gleichmäßig und absolut konvergiert. In der Tat häufen sich die Punkte von B, ja sogar gleichmäßig, nach den Punkten (m), wo H als endlich vorausgesetzt wurde, und somit besitzen die rationalen Funktionen $|H(x', y')|$, von endlich vielen unter ihnen abgesehen, die im Bereich B polar unstetig werden, eine obere Grenze, woraus folgt, daß die Konvergenz der Reihe (51) von der absoluten Konvergenz der der speziellen Annahme $H \equiv 1$ entsprechenden Reihe

$$\Sigma (\gamma x + \delta)^{-p} \tag{52}$$

abhängt. Dies ist aber eine Poincarésche Reihe der Gruppe g, die bekanntlich sicher für $p \geqq 4$ absolut konvergent ist. Die Reihen (51) stellen somit bei hinreichend großem Wert von p analytische Funktionen dar, die der Funktionalgleichung

$$\Theta(x', y') = \Theta(x, y)\,(\gamma x + \delta)^p \tag{53}$$

genügen, und die in jedem Punkt der Geraden $x = x_\infty$ und im allgemeinen für $y = \infty$ wesentlich singulär werden, sonst aber den Charakter rationaler Funktionen haben. Die Quotienten zweier verschiedener zu einem und demselben Wert von p gehörigen Θ-Funktionen sind in bezug auf Γ invariante analytische Funktionen von (x, y), die die nämlichen wesentlichen Singularitäten wie die Θ-Funktionen besitzen. Die Existenz der zur Gruppe Γ gehörigen automorphen Funktionen ist also bewiesen.

17. Zur genaueren Untersuchung der automorphen Funktionen bemerken wir, daß sie bei konstantem endlichen Werte von y transzendente Funktionen von x sind, die sich im allgemeinen auf die bisher bekannten Transzendenten nicht zurückführen lassen. Diese Funktionen können, wie aus dem Folgenden hervorgeht, als eine Verallgemeinerung der Poincaréschen automorphen Zeta-Funktionen angesehen werden.

Bei konstantem nichtsingulären Werte von x sind die fraglichen Funktionen meromorphe Funktionen von y. Diese Funktionen stehen zu den automorphen Funktionen von g in gewisser Hinsicht im analogen Verhältnis wie die elliptischen Funktionen zu den Modulfunktionen.

Zur näheren Erläuterung dieser Behauptungen betrachten wir genauer die Abhängigkeit der Funktionen von der rationalen Funktion H. Wie findet man vor allem eine rationale Funktion H, die den zur Konvergenz der Θ-Reihen erforderlichen Bedingungen genügt?

Nach Nr. 14 gelten für die Punkte (x_∞, y_∞) der Menge (m) die Ungleichungen

$$|x_\infty| \leqq \varrho, \qquad |y_\infty| \leqq \varkappa = \frac{\eta}{1-\eta}\,\omega. \tag{54}$$

Die erforderlichen Bedingungen werden sicher erfüllt, sobald H im Bereiche (54) keine Unstetigkeiten besitzt, was z. B. durch die Wahl

$$H(x, y) = \frac{1}{a x + b y + c}$$

erreicht wird, wenn $|a|\varrho + |b|\varkappa < |c|$ ist. Wenn insbesondere die Koeffizienten sämtlicher Substitutionen von Γ reell sind, so sind auch offenbar die Häufungspunkte (m) reell und dann besitzt u. a. jede rationale Funktion

$$H(x, y) = \frac{P_1(x, y)}{P_2(x, y)},$$

wo P_1 ein beliebiges Polynom und P_2 ein Polynom mit nicht reellen Nullpunkten ist, die verlangte Eigenschaft.

18. Wir betrachten speziell das Beispiel

$$H(x, y) = \frac{1}{(y - \lambda)^q}, \tag{55}$$

wo λ eine Konstante ist, die mit keinem Wert y_∞ identisch ist. Für $p = nq$ wird dann aus (51) die Reihe

$$\Theta(x, y) = \sum \frac{1}{[y + \sum_{\nu=1}^{n+1} c_\nu x^{n-\nu+1} - \lambda(\gamma x + \delta)^n]^q} \tag{56}$$

erhalten, die eine gewisse Analogie mit den Eisensteinschen Reihen für die doppeltperiodischen Funktionen aufweist. Diese Analogie tritt noch deutlicher im Falle $n = 1$ und beim Übergang zu homogenen Koordinaten

$$x = \frac{u}{\omega_2}, \qquad y = \frac{\omega_1}{\omega_2},$$

zutage, indem dann aus (51) nach Multiplikation mit ω_2^{-q} die Reihe

$$\sum \frac{1}{\{u + c_1\omega_1 + c_2\omega_2 - \lambda(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2)\}^q} \tag{57}$$

erhalten wird, die bei Gruppen Γ reeller Substitutionen schon für $q = 2$ [7]) und u. a. für jeden nichtreellen Wert von λ absolut konvergiert.

Die Reihen (57) stellen automorphe Formen der homogenen Gruppe dar, d. h. Funktionen, die den Substitutionen

$$\begin{cases} u' = u + c_1\omega_1 + c_2\omega_2, \\ \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \qquad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{cases} \tag{58}$$

[7]) Nach einem Satz von Ritter (Math. Annalen 41 (1892)).

gegenüber invariant sind. Als Funktionen von u betrachtet sind sie meromorphe Funktionen, die als eine Verallgemeinerung der doppeltperiodischen Funktionen angesehen werden können.

Es ist indessen zu beachten, daß bei unseren Funktionen die Variablen $u_1\,\omega_1$ und ω_2 *simultan* der linearen Substitution (58) zu unterwerfen sind, im Gegensatz zu den elliptischen Funktionen, bei welchen das Argument u und die Perioden für sich transformiert werden können.

19. Wir betrachten zweitens denjenigen speziellen Fall, wo H eine ganze rationale Funktion in bezug auf y ist. Dann reduziert sich die zugeordnete Θ-Funktion offenbar auf eine ganze rationale Funktion von y, die von derselben Ordnung ist wie H. Wird eine solche Θ-Funktion mit dem Index p mit einer Θ-Funktion der Gruppe g desselben Index dividiert, so ergibt sich eine automorphe Funktion von Γ:

$$f(x,y)=\frac{\Theta_p(x,y)}{\Theta_p(x)}, \tag{58'}$$

die als Funktion von y ein Polynom ist, und der Quotient zweier derartiger Funktionen wird somit eine rationale Funktion von y. Es gibt unter den automorphen Funktionen von Γ solche, die in bezug auf y rationale Funktionen beliebigen Grades sind. Insbesondere reduzieren sich die Funktionen nullten Grades auf die automorphen Funktionen der Gruppe.

Wir schreiben die Funktion $(58)'$ als Polynom k-ten Grades mit den von x abhängigen Koeffizienten $\varphi_\nu(x)$ in der Form

$$f(x,y)=\sum_{\nu=0}^{\varkappa}\varphi_\nu(x)\,y^\nu. \tag{59}$$

Aus

$$f\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\ \frac{y+\sum_{\nu=1}^{n+1}c_\nu x^{n-\nu+1}}{(\gamma x+\delta)^n}\right)=f(x,y) \tag{60}$$

ergibt sich, durch Vergleichung der Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von y, daß das Funktionensystem

$$z_{\mu,\nu}=x^\mu\varphi_\nu(x) \qquad \begin{pmatrix}\mu=0,1,2,\ldots,n\nu\\ \nu=0,1,2,\ldots,\varkappa\end{pmatrix} \tag{61}$$

bei Ausführung irgendeiner Substitution von g eine lineare Transformation der Form

$$z'_{\mu,\nu}=\Sigma\, b_{\mu,\nu,\pi,\varrho}\,z_{\pi,\varrho} \tag{62}$$

erleidet, wo die Koeffizienten b für $\nu>\varrho$ gleich Null sind. Die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ bilden somit ein System automorpher Zeta-Funktionen unserer Gruppe g. Die Reihen (51) reduzieren sich im wesentlichen auf die Poincaréschen Zeta-Reihen.

Ist $H(x, y)$ eine gebrochene Funktion von y, so ist $f(x, y)$ jedenfalls eine transzendente Funktion von y. Die Koeffizienten $\varphi_\nu(x)$ in ihrer Potenzreihenentwicklung nach y bilden ein unendliches Funktionensystem, das bei Ausführung der Substitutionen von g eine lineare Transformation (62) mit unendlich vielen Größen $z_{\mu,\nu}$ erleidet. In diesem Sinne kann man hier von einer Verallgemeinerung der automorphen Zeta-Funktionen reden.

20. Die vorhergehenden Betrachtungen beziehen sich auf diejenigen Gruppen Γ, deren zugeordnete Gruppe g eine Gruppe des Schottkyschen Typus ist. Es ist indessen auch bei einer beliebigen Gruppe Γ möglich, die Existenz automorpher Funktionen nachzuweisen, wenigstens, wenn man sich auf den speziellen Fall der in bezug auf y rationalen Funktionen beschränkt. In diesem Falle sind nämlich die Reihen (51), wie schon oben gesagt, im wesentlichen Poincarésche Zeta-Reihen. Diese Reihen sind nun nach Poincaré[8]) für hinreichend großes p absolut konvergent, sobald die Wurzeln derjenigen determinierenden Gleichungen, die den parabolischen Substitutionen von g entsprechen, dem absoluten Betrage nach gleich der Einheit sind. Diese Bedingung ist nun hier stets erfüllt.

Wir wählen, um dies zu beweisen, für die parabolische Substitution den Ausdruck $x' = x + 1$ oder homogen geschrieben

$$x_2' = x_2 + x_3, \qquad x_3' = x_3. \tag{63}$$

Es sei H etwa eine ganze lineare Funktion von y und

$$f(x, y) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)\, y \tag{64}$$

der zugeordnete Ausdruck (59). Wir setzen

$$\varphi_0 = z_0, \quad x^n \varphi_1 = -z_1, \quad x^{n-1} \varphi_2 = -z_2, \quad \ldots, \quad \varphi_1 = -z_{n+1}$$

und erhalten für die zugeordnete Transformation (62) den Ausdruck (7), wo allgemein $a_{i\varkappa} = \binom{n-i+1}{n-\varkappa+1}$ und daher $a_{ii} = 1$, $a_{i\varkappa} = 0$ für $i > \varkappa$ ist. Dann reduziert sich aber die determinierende Gleichung von (7) auf

$$(1 - \omega)^{n+1} = 0,$$

deren Wurzeln alle gleich Eins sind. Die Poincarésche Bedingung ist also stets erfüllt. Die Existenz der in bezug auf y rationalen automorphen Funktion ist zugleich allgemein bewiesen.

Dagegen müssen wir hier die interessante Frage unberührt lassen, ob es im allgemeinen automorphe Funktionen der in Nr. 18 betrachteten Art gibt, die in bezug auf y transzendente Funktionen sind.

---

[8]) Poincaré, *Mémoire sur les fonctions zéta-fuchsiennes.* (Acta mathematica 5 (1884), S. 209.)

IV.

Die Abhängigkeit der automorphen Funktionen einer Jonquièresschen Gruppe voneinander.

21. Bekanntlich besteht zwischen zwei beliebigen automorphen Funktionen einer Gruppe g eine algebraische Gleichung und ferner läßt sich jede automorphe Funktion von g durch zwei (in speziellen Fällen durch eine einzige) unter ihnen rational ausdrücken.

Es sei nun

$$f_1(x), \qquad f_2(x) \tag{65}$$

irgendein Paar automorpher Funktionen der unserer Jonquièresschen Gruppe Γ zugeordneten Gruppe g, von welchen alle übrigen automorphen Funktionen von g rational abhängen. Ferner sei

$$f_3(x, y) = \frac{A(x)y + B(x)}{C(x)y + D(x)} \tag{66}$$

eine beliebige in bezug auf y lineare automorphe Funktion von Γ.

Wir behaupten, daß jede automorphe Funktion von Γ eine eindeutige analytische Funktion der drei Funktionen

$$X_1 = f_1(x), \quad X_2 = f_2(x), \quad X_3 = f_3(x, y) \tag{67}$$

ist.

Es sei nämlich $f(x, y)$ eine beliebige automorphe Funktion von Γ. Um ihre Eigenschaften als Funktion von X_1, X_2 und X_3 zu untersuchen, bemerken wir zunächst, daß jedem Wertpaar X_1, X_2, welches der zwischen den Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ bestehenden Gleichung

$$P(X_1, X_2) = 0 \tag{68}$$

genügt, ein bis auf die Substitutionen von g bestimmten Wert von x entspricht.

Wir nehmen zuerst an, daß bei dem Fundamentalbereich von g keine parabolischen Spitzen vorkommen. Dann hat x überall auf der Riemannschen Fläche (68) den Charakter rationaler Funktionen. Weil ferner die Koeffizienten A, B, C und D in (66) die nämlichen wesentlichen Singularitäten besitzen, wie die automorphen Funktionen von g, so wird bei gegebenen Werten von X_1, X_2 und X_3 der Wert von $f(x, y)$ im allgemeinen eindeutig bestimmt.

Wenn nun die Funktion $f(x, y)$ in bezug auf y rational ist, so besitzt sie als Funktion von X_1, X_2 und X_3:

$$f(x, y) = g(X_1, X_2, X_3) \tag{69}$$

keine wesentlichen Singularitäten und sie ist folglich eine rationale Funktion

hrer drei Argumente. Ist dagegen $f(x, y)$ in bezug auf y transzendent, o wird sie eine eindeutige transzendente Funktion von X_1, X_2, X_3. Ihre vesentlichen Singularitäten hat die Funktion (69) in denjenigen Punkten, lie dem Wert $y = \infty$ entsprechen, also in den Punkten der Mannigfaltigkeit

$$X_1 = f_1(x), \quad X_2 = f_2(x), \quad X_3 = \frac{A(x)}{C(x)}, \tag{70}$$

erner auf etwaigen linearen Mannigfaltigkeiten

$$X_1 = \text{konst.}, \quad X_2 = \text{konst.}, \tag{71}$$

lie den Polen und Nullstellen der Koeffizienten A, B, C, D in (66) ent-sprechen. Weil $\frac{A(x)}{C(x)}$ eine automorphe Funktion von g ist, kann sie als eine rationale Funktion von X_1 und X_2 dargestellt werden:

$$X_3 = R(X_1, X_2). \tag{71}'$$

In den algebraischen Mannigfaltigkeiten (71) und (71)′ besitzen wir also die wesentlichen Singularitäten der Funktionen $g(X_1, X_2, X_3)$. Diese Singularitäten sind nur von den drei Funktionen (67), nicht aber von der Wahl von $f(x, y)$ abhängig.

Aus dem Vorhergehenden geht zugleich hervor, daß das Funktionensystem (67) bis auf eine birationale Transformation der Form

$$\begin{cases} X_1' = R_1(X_1, X_2), \quad X_2' = R_2(X_1, X_2), \\ X_3' = \dfrac{R_3(X_1, X_2)\, X_3 + R_4(X_1, X_2)}{R_5(X_1, X_2)\, X_3 + R_6(X_1, X_2)} \end{cases} \tag{72}$$

bestimmt ist. Hier definieren dann die beiden ersten Gleichungen eine zum Gebilde (68) gehörige birationale Transformation und ferner sind R_3, R_4, R_5, R_6 beliebige rationale Funktionen, deren Determinante mit Rücksicht auf (68) nicht identisch Null ist.

Wir haben im Obigen das Fehlen der parabolischen Spitzen vorausgesetzt. Durch Anwendung üblicher Methoden läßt sich aber leicht zeigen, daß das Obige auch bei Vorhandensein parabolischer Spitzen seine Gültigkeit hält.

V.

Aufstellung der Differentialgleichungen für die polymorphen Funktionen der Jonquièresschen Gruppen.

A. Gruppen erster Ordnung.

22. Wie schon in der Einleitung erwähnt, gestatten die automorphen Funktionen der Jonquièresschen Gruppen die Lösung eines Inversionsproblems für gewisse lineare Differentialgleichungen, welches analog ist der Inversion der Integralquotienten der homogenen linearen Differential-

gleichungen zweiter Ordnung mit Hilfe der automorphen Funktionen einer Variablen. Zweck des vorliegenden letzten Kapitels ist, auf diese Frage näher einzugehen, wobei wir uns der Kürze halber hauptsächlich auf den niedrigsten Fall $n=1$ beschränken wollen.

Wir setzen, unter $f(x)$ eine beliebige automorphe Funktion von g verstanden,

$$(73) \qquad v_1 = \sqrt{\frac{df}{dx}}, \qquad v_2 = x\sqrt{\frac{df}{dx}}, \qquad v_3 = y\sqrt{\frac{df}{dx}}.$$

Das Verhalten von (73) als Funktionen von x und y den Substitutionen (3) von Γ gegenüber wird durch die Gleichungen

$$(74) \quad v_1' = \gamma v_1 + \delta v_2, \qquad v_2' = \alpha v_1 + \beta v_2, \qquad v_3' = v_3 + c_1 v_1 + c_2 v_2$$

ausgedrückt,

Wir bilden nun eine in bezug auf y ganze lineare automorphe Funktion von Γ:

$$(75) \qquad Y = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)\, y,$$

indem wir im Ausdruck (58)

$$(76) \qquad \Theta_p(x, y) = \sum (R_0(x') + R_1(x')\, y')(\gamma x + \delta)^{-p}$$

setzen. Dann ist

$$(77) \qquad \begin{cases} \varphi_0(x) = \dfrac{1}{\Theta_p} \sum \left(R_1(x') + R_2(x') \dfrac{c_1 x + c_2}{\gamma x + \delta} \right) (\gamma x + \delta)^{-p}, \\ \varphi_1(x) = \dfrac{1}{\Theta_p} \sum R_2(x') (\gamma x + \delta)^{-(p+1)}, \end{cases}$$

woraus hervorgeht, daß φ_0 eine ganze lineare Funktion der Koeffizienten (c) der erzeugenden Substitutionen ist, während die Funktion φ_1, die eine Θ-Funktion erster Ordnung von g ist, von jenen Koeffizienten nicht abhängt.

Nach Nr. 21 hat die allgemeinste in bezug auf y ganze lineare automorphe Funktion den Ausdruck

$$(78) \qquad \overline{Y} = S_0(X) + S_1(X)\, Y,$$

wo S_0 und S_1 beliebige rationale Funktionen von $X_1 = X$ und X_2 und somit algebraische Funktionen von X sind.

Als Funktionen von X und Y bezeichnen wir (73) mit

$$(79) \qquad v_1(X), \qquad v_2(X), \qquad v_3(X, Y) = \psi_0(X) + \psi_1(X)\, Y,$$

weil v_1 und v_2 von Y unabhängig sind und weil v_3 wegen (73) und (75) eine ganze lineare Funktion von Y ist. Aus

$$(80) \qquad \psi_0 = -\frac{v_1}{\varphi_1}\varphi_0, \qquad \psi_1 = \frac{v_1}{\varphi_1}$$

ervorgeht, daß ψ_0 eine ganze lineare Funktion der Koeffizienten (c) ist, während ψ_1 von ihnen nicht abhängt.

Wegen der beiden ersten Gleichungen (74) genügen die Funktionen $_1(X)$, $v_2(X)$ einer homogenen linearen Differentialgleichung der Form

81) $$\frac{d^2v}{dX^2} = q(X)v,$$

vo $q(X)$ eine algebraische Funktion von X bezeichnet. Ferner kann

82) $$v_3(X, Y) + k_1 v_1(X) + k_2 v_2(X)$$

ls allgemeines Integral einer zu (78) geordneten nichthomogenen Differentialgleichung der Form

83) $$\frac{d^2v}{dX^2} = q(X)v + \varrho_0(X) + \varrho_1(X)Y$$

ngesehen werden, wo $\varrho_0(X)$ und $\varrho_1(X)$ algebraische Funktionen bezeichnen, ie mit den Funktionen $\psi_0(X)$ und $\psi_1(X)$ vermittels der Gleichungen

84) $$\begin{cases} \varrho_0(X) = \psi_0''(X) - q(X)\psi_0(X), \\ \varrho_1(X) = \psi_1''(X) - q(X)\psi_1(X) \end{cases}$$

erbunden sind.

Nach dem Vorhergenden ist es möglich, für die nichthomogene Differentialgleichung (80) ein Inversionsproblem zu lösen, das der bekannten nversion der Integralquotienten der homogenen Gleichung vermittels utomorpher Funktionen von g analog ist, indem nämlich die unabhängige eränderliche X und die als Parameter auftretende Größe Y als eindeutige utomorphe Funktionen der Integralquotienten

85) $$\frac{v_2}{v_1} = x, \qquad \frac{v_3}{v_1} = y$$

arstellbar sind. Die Integrale selbst werden durch

$$v_1 = \sqrt{\frac{dX}{dx}}, \qquad v_2 = xv_1, \qquad v_3 = yv_1$$

ls eindeutige Funktionen von x und y dargestellt.

23. Bei genauerem Studium der Differentialgleichung (80) beschränken wir uns der Kürze halber auf Gruppen g nullten Geschlechtes. Es gibt dann eine bis auf eine lineare Transformation bestimmte automorphe Funktion von g:

86) $$X = f(x),$$

deren rationale Funktionen alle automorphen Funktionen von g sind. Dann sind auch die Koeffizienten q, ϱ_0 und ϱ_1 der Gleichung (80) rationale Funktionen von X.

Die erste dieser Funktionen, die von $f(x)$ allein abhängig ist, besitzt einen Ausdruck der Form[9])

$$q(X) = \frac{P_{2n-2}(X)}{(X-a_1)^2(X-a_2)^2\ldots(X-a_n)^2}, \tag{87}$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $a_{n+1} = \infty$ die Werte von $f(x)$ in den Eckpunkten des Fundamentalbereichs von g repräsentieren und wo P_{2n-2} ein Polynom $(2n-2)$-ten Grades bezeichnet. Dagegen sind ϱ_0 und ϱ_1 noch sehr willkürlich, indem sie von der Wahl der Funktion Y abhängen, die nun bis auf eine Transformation der Form (78) bestimmt ist, wo S_0 und S_1 ganz willkürliche rationale Funktionen von X sind. Es bleiben nur noch diese Transformationen so zu wählen, daß die rationalen Funktionen ϱ_0 und ϱ_1 möglichst einfach werden.

Es sei

$$v_3 = \Psi_0 + \Psi_1 \bar{Y}$$

der Ausdruck von v_3 nach Ausführung der Transformation (78). Dann ist

$$\Psi_0 = \psi_0 - \frac{\psi_1}{S_1} S_0, \qquad \Psi_1 = \frac{\psi_1}{S_1}. \tag{88}$$

Die Funktion ψ_1 ist als Quotient zweier Θ-Funktionen gleicher Ordnung eine rationale Funktion von X. Wir können daher $S_1 = \psi_1$ wählen und also $\Psi_1 = 1$ setzen. Nach der zweiten Gleichung (87) wird dann

$$\varrho_1(X) = -q(X).$$

Die erste der Gleichungen (88) lautet nachher

$$\Psi_0 = \psi_0 - S_0$$

und der transformierte Ausdruck von ϱ_0 wird

$$\bar{\varrho}_0 = \varrho_0 - (S_0'' - q S_0). \tag{89}$$

24. Man kann nun durch geeignete Wahl der rationalen Funktion S_0 stets erreichen, daß $\bar{\varrho}_0$ keine Pole außerhalb der Punkte a_i besitzt. In der Tat hat ψ_0 nach (77) und (80) außerhalb der Punkte $X = a_i$ keine Verzweigungspunkte und nur endlich viele Pole, welch letztere durch eine geeignete Wahl von S_0 aufgehoben werden können. Dann wird aber ψ_0 und daher auch $\bar{\varrho}_0$ nach (84) sich außerhalb der Punkte a_i regulär erhalten.

Es ist ferner möglich, die in den Punkten a_i möglicherweise vorhandenen Pole von Ψ_0 auf solche zweiter Ordnung zu reduzieren. Ist nämlich allgemein a ein Pol n-ter Ordnung von ϱ_0 und

$$\varrho_0 = \frac{\alpha_n}{(x-a)^n} + \frac{\alpha_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \ldots; \qquad q = \frac{\beta_2}{(x-a)^2} + \frac{\beta_1}{x-a} + \ldots \tag{90}$$

[9]) Vgl. Poincaré, *Sur les fonctions fuchsiennes.* (Acta mathematica **1** (1882) S. 231 ff.).

e Entwicklung von ϱ_0 bzw. q in der Umgebung von a, so kann man
ır $n > 2$

91) $$S_0 = \frac{\gamma_{n-2}}{(x-a)^{n-2}} + \frac{\gamma_{n-3}}{(x-a)^{n-3}} + \dots$$

etzen, woraus

92) $$S_0'' - qS_0 = \frac{[(n-2)(n-1) - \beta_2]\gamma_{n-2}}{(x-a)^n} + \dots$$

rhalten wird. Wir wählen nun γ_{n-2} aus

93) $$[(n-2)(n-1) - \beta_2]\gamma_{n-2} = \alpha_n,$$

as stets möglich ist, weil $\beta_2 \leqq \frac{1}{4}$ [10]) und somit der Koeffizient von γ_{n-2} on Null verschieden ist. Durch Anwendung dieser Methode lassen sich lle Koeffizienten $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_3$ gleich Null setzen und somit alle Pole von ϱ_0 auf solche von höchstens zweiter Ordnung reduzieren.

Man kann schließlich in ähnlicher Weise noch erreichen, daß ϱ_0 enigstens in dritter Ordnung Null wird für $X = \infty$. Denn wird der anze Teil von S_0 mit

94) $$\delta_{n+2}X^{n+2} + \delta_{n+1}X^{n+1} + \dots + \delta_0$$

ezeichnet, so erhält man

95) $$S_0'' - qS_0 = [(n+2)(n+1) - \beta_2']\delta_{n+2}X^{n+2} + \dots$$

ls Entwicklung der linken Seite in der Umgebung des Punktes $X = \infty$, enn β_2' den Koeffizient von X^{-2} in der Entwicklung von q bezeichnet. ieser Koeffizient ist nun stets eine von Null verschiedene gebrochene ahl und somit können die Koeffizienten in (94) so bestimmt werden, aß die Entwicklung von $\bar{\varrho}_0$ in der Umgebung von $X = \infty$ mit dem lied cx^{-3} beginnt.

Nach dem Vorhergehenden kann man durch eine geeignete Wahl on Y erreichen, daß unsere Differentialgleichung (89) die Gestalt

96) $$\frac{d^2v}{dX^2} = \frac{(v-Y)P_{2n-2}(X) + P_{2n-3}(X)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2}$$

nnehmen wird, wo P_{2n-2} und P_{2n-3} Polynome $(2n-2)$-ter bzw. $2n-3$)-ter Ordnung bezeichnen. Hier ist P_{2n-3} eine lineare Funktion er Koeffizienten c_1, c_2 der erzeugenden Substitutionen, während P_{2n-2} on jenen Koeffizienten nicht abhängt.

25. Bei gegebener Gruppe g lassen sich die $2n-2$ in P_{2n-2} auf-retenden Parameter stets so wählen, daß die erzeugenden Substitutionen 74) der Gruppe der Differentialgleichung (96) vorgeschriebene Koeffizienten

[10]) Vgl. die in der vorigen Fußnote zitierte Arbeit von Poincaré.

c_1, c_2 besitzen werden. In der Tat besitzt diese Gruppe n erzeugende Substitutionen und daher $2n$ Parameter c_1, c_2, von denen jedoch nur $2n-2$ wesentlich sind, weil die Substitutionen nur bis auf eine Transformation der Form

$$x' = x, \quad y' = y + \tau_1 x + \tau_2$$

bestimmt sind und daher z. B. zwei der Konstanten c gleich Null gesetzt werden können.

Damit nun die Gruppe Γ mit g bzw. g' holoedrisch isomorph wäre, müssen im allgemeinen nach Kap. II zwischen den Koeffizienten c eine Anzahl ν linearer Relationen stattfinden und die Differentialgleichung (96) wird dann von $2n-2-\nu$ Parametern abhängen. Diese Relationen fehlen bei Gruppen g, die keine Relationen zwischen ihren Substitutionen besitzen. Zu diesen Gruppen gehören die „Gruppen zweiter Familie" reeller Substitutionen. Das einfachste Beispiel solcher Gruppen besitzt man in der von dem Legendresschen elliptischen Integral herrührenden Modulgruppe. Wir wählen $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ und $n = 2$ und erhalten für die zugeordnete Differentialgleichung (96) den Ausdruck

$$\frac{d^2v}{dX^2} = \left(\frac{1}{4X(X-1)} - \frac{1}{4X^2} - \frac{1}{4(X-1)^2}\right)(v - Y) + \frac{b_0 + b_1 X}{X^2(X-1)^2},$$

die von den zwei willkürlichen Parametern b_0 und b_1 abhängt.

B. Gruppen beliebiger Ordnung.

26. Wir wollen zum Abschluß noch in aller Kürze die Differentialgleichungen für die Jonquièresschen Gruppen beliebiger Ordnung aufstellen.

Es sei $X = f(x)$ eine beliebige automorphe Funktion von g und Y eine beliebige in bezug auf y lineare automorphe Funktion der Jonquièresschen Gruppe n-ter Ordnung Γ. Wir setzen

$$(97) \qquad v_1 = \left(\frac{df}{dx}\right)^{\frac{n}{2}}, \quad v_2 = x v_1, \quad v_3 = x^2 v_1, \ldots, \quad v_{n+1} = x^n v_1, \quad v_{n+2} = y v_1$$

und erhalten ein Funktionensystem, das bei Ausführung der Substitution (10) die Transformation

$$(98) \quad \begin{cases} v_1' = (\gamma x + \delta)^n v_1 = \delta^n v_1 + n\delta^{n-1}\gamma v_2 + \ldots + \gamma^n v_{n+1} \\ v_2' = (\gamma x + \delta)^{n-1}(\alpha x + \beta) v_1 = \delta^{n-1}\beta v_1 + \ldots + \gamma^{n-1}\alpha \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{n+1}' = (\alpha x + \beta)^n v_1 = \beta^n v_1 + n\beta^{n-1}\alpha v_2 + \ldots + c_1 v_{n+1} \\ v_{n+2}' = v_{n+2} + c_{n+1} v_1 + c_n v_2 + \ldots + c_1 v_{n+1} \end{cases}$$

erleidet, die für $z_\mu = v_{n+2-\mu}$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots, n+1)$ direkt in (7) übergeht

Die $n+1$ ersten Gleichungen (98) zeigen, daß die Größen $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ n System automorpher Zeta-Funktionen von x bilden, und sie genügen aher als Funktionen von X einer homogenen linearen Differentialgleichung $n+1)$-ter Ordnung

99) $$\frac{d^n v}{dX^n} + \sum_{\nu=n-1}^{0} R_\nu(X) \frac{d^\nu v}{dX^\nu} = 0,$$

eren Koeffizienten algebraische Funktionen von X sind. Zwischen den ntegralen von (99) herrscht eine Anzahl quadratischer Gleichungen, die aan durch die Matrizengleichung

100) $$\left\| \begin{matrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \\ v_2 & v_1 & \ldots & v_{n+1} \end{matrix} \right\| = 0$$

arstellen kann.

Die $n+2$ Größen (97) können dann als ein System linear unabhängiger ntegrale einer nichthomogenen Differentialgleichung der Form

101) $$\frac{d^n v}{dX^n} + \sum_{\nu=n-1}^{0} R_\nu(X) \frac{d^\nu v}{dX^\nu} = \varrho_0(X) + \varrho_1(X) Y$$

ngesehen werden, deren Koeffizienten ϱ_0 und ϱ_1 algebraisch von X abängen. Diese Gleichung definiert X und Y als automorphe Funktionen er Integralquotienten

102) $$\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_2} = \ldots = \frac{v_{n+1}}{v_n} = x, \qquad \frac{v_{n+2}}{v_1} = y,$$

omit ein den Differentialgleichungen zweiter Ordnung analoges Inversionsroblem gelöst wird.

(Eingegangen am 12. März 1924.)

Über eine gemeinsame Behandlungsweise verschiedener Differentialgeometrien.

Von

G. Thomsen in Karlsruhe.

In konsequenter Verfolgung Kleinscher Ideen behandelt man in neuerer Zeit die Differentialgeometrien der geometrisch bedeutsamen Gruppen mit eigens für diese Untersuchungen aufgestellten invarianten Formelapparaten. Wilczynski[1]) und Fubini[2]) haben die projektive Differentialgeometrie begründet. Die entsprechenden Untersuchungen für die affine Geometrie haben durch Blaschke und Reidemeister eine systematische Darstellung gefunden[3]). Auch für die konforme[4]) und die Laguerresche[5]) Gruppe sind (speziell zur Behandlung der Flächentheorie) neuerdings solche Formelapparate aufgestellt worden. Einmal geben diese Untersuchungen einen Beweis für die Spürkraft der Kleinschen Prinzipien um die geometrisch wichtigen Begriffsbildungen aufzufinden; dann liefern sie aber auch ein weites Anwendungsgebiet für den *Tensor-* und *Ricci-kalkül* und beweisen seine Überlegenheit gegenüber den andern bisher in der Differentialgeometrie angewandten Methoden.

Da die Aufstellung der Formelapparate für die Geometrie der Flächen oder der sonst zu behandelnden Mannigfaltigkeiten immer in gleicher Weise verläuft: In dem Aufsuchen eines invariant mit der Mannigfaltigkeit verbundenen begleitenden Koordinatensystems und in dem Aufstellen

[1]) Wilczynski, Transactions of the American Math. Soc. 8 (1907); 9 (1908) 10 (1909) und zahlreiche weitere Arbeiten.

[2]) Fubinis Schriften findet man zum großen Teil in den Rendiconti di Palermo 43 (1919), S. 2 zusammengestellt.

[3]) W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II.

[4]) G. Thomsen, Abhandlungen aus dem Hamb. math. Sem. 3 (1924), S. 31—5

[5]) W. Blaschke, Abh. aus dem Hamb. math. Sem. 3 (1924), S. 176—194.

von Ableitungsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen regt sich naturgemäß der Wunsch nach einer möglichst weitgehenden gemeinsamen Behandlungsweise der verschiedenen Differentialgeometrien.

In dieser Arbeit soll die Frage, was sich aus all den Einzeluntersuchungen als wesentlich gemeinsamer Bestandteil heraustrennen läßt, jedoch nicht in prinzipieller Allgemeinheit angefaßt werden. Derart abstrakt und allgemein gehaltene Untersuchungen dürften wohl erst im Zusammenhange mit tiefergehenden gruppentheoretischen Fragestellungen fruchtbar und interessant werden. Im Gegensatz zu jener allgemeinen Aufgabe bewegt sich diese Arbeit in engerem Rahmen. *Den folgenden Untersuchungen liegt die Tatsache zugrunde, daß man aus einem Formelapparat, der in seinen wesentlichen Bestandteilen zur systematischen Behandlung der projektiven Geometrie der Strahlensysteme*[6]) *ohnehin aufgestellt werden muß, die Formeln einer großen Zahl von Geometrien durch einfache Spezialisierungen ableiten kann.* (Vgl. die Tafel auf S. 270). *Die projektive Geometrie der Strahlensysteme* hat Fubini[7]) unter Zugrundelegung einer quadratischen und einer biquadratischen Differentialform behandelt. Hier ist jedoch ein anderer Weg eingeschlagen worden, der für die geometrischen Anwendungen brauchbarer sein dürfte. Auch dieser ist bei Fubini bereits in wesentlichen Ansätzen angedeutet[7]). Es werden *Linienkoordinaten* verwandt. Der Strahl $\mathfrak{p}$ des Systems wird als Funktion zweier Parameter u^1 und u^2 gegeben. Der Zahl der Koordinaten entsprechend werden noch drei weitere Strahlen $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{z}$ außer $\mathfrak{p}$ und einen beiden Ableitungen nach den Parametern eingeführt, aus denen dann die zweiten Ableitungen von $\mathfrak{p}$ und die ersten Ableitungen von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ und $\mathfrak{z}$ linear kombiniert werden (Ableitungsgleichungen)[7a]).

Mit der projektiven Geometrie der Strahlensysteme ist nach der Lieschen Geraden-Kugeltransformation die *höhere Kugelgeometrie* (Liesche Geometrie) *der Kugelsysteme*[8]) im wesentlichen identisch. Den Strahlen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ und $\mathfrak{z}$ entsprechen „*orientierte*“ Kugeln. Zur 10-gliedrigen Gruppe der konformen Abbildungen des Raumes gelangt man nun, indem man einen linearen (Kugel-)Komplex adjungiert. Die dem ausgezeichneten Komplex angehörenden Kugeln sind die Punkte. Also ist die *konforme Flächentheorie* nichts anderes als die Liesche Geometrie derjenigen Kugelsysteme, deren Kugeln sämtlich ein und demselben linearen Komplex an-

---

[6]) (Strahlenkongruenzen).

[7]) Fubini, Rom. acc. Lincei 27 (1918), 28 (1919).

[7a]) Fubini führt statt der drei Strahlen lineare Komplexe ein, die mit denselben in einfacher Weise zusammenhängen.

[8]) Kugelkongruenzen.

gehören. Zur Laguerreschen Geometrie gelangt man durch Adjunktion einer Kugel. Indem man die Kugelsysteme betrachtet, deren Kugeln alle eine feste Kugel berühren, betreibt man die *Flächentheorie der Laguerreschen Gruppe.* Denn wenn man den zweiten, nicht in eine Kugel ausgearteten Enveloppenmantel im Zusammenhange solcher Kugelsysteme betrachtet, adjungiert man dadurch implizit eine Kugel.

Man kann die Formeln der konformen Geometrie so einrichten, daß die Laguerresche Geometrie als Spezialfall herauskommt.

Bei der Aufstellung des analytischen Apparats für die projektive Geometrie der Strahlensysteme zeigt sich, daß man die Strahlen $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ und $\mathfrak{z}$ in ihrer Abhängigkeit von dem System gar nicht ganz festzulegen braucht, um Ableitungsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen in der endgültigen einfachsten erreichbaren Gestalt aufstellen zu können. Man kann dieselben noch zu einem gewissen Grade willkürlich und veränderlich lassen, ohne daß die formale Beschaffenheit dieser Gleichungen eine Änderung erfährt. Erst in weiter hinzutretenden Beziehungen zwischen den in ihnen auftretenden Tensoren äußert sich die endgültige Festlegung. Indem man nun die projektive Geometrie der Strahlensysteme zunächst ohne völlige Festlegung von $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ und $\mathfrak{z}$ behandelt, kann man aus ihren Formeln weitere Geometrien durch Spezialisierung gewinnen. Beispielsweise kann man die Willkür in der Wahl dieser Strahlen zu der Forderung benützen, daß der eine von ihnen für alle Stellen des Systems dauernd in derselben fest vorgegebenen Ebene liegen soll. Dadurch wird implizit eine Ebene adjungiert, und man gelangt zur *affinen Geometrie der Strahlensysteme.* Die an die Lage des einen der Strahlen gestellte Forderung äußert sich in einer hinzutretenden Beziehung zwischen den in den Ableitungsgleichungen auftretenden Tensoren. Man kann umgekehrt diese Beziehung zwischen den Tensoren zur Forderung erheben; aus ihr folgt dann, daß der eine der Strahlen in einer festen Ebene liegt und daß man zur Affingeometrie gelangt. Dieser letztere Weg ist im folgenden immer eingeschlagen. (Siehe die Tafel auf Seite 270.)

Die nichteuklidische (sowohl die elliptische, wie die hyperbolische) Geometrie ergibt sich aus der konformen, indem man eine feste Kugel adjungiert, die gewöhnliche euklidische Bewegungsgeometrie durch Adjunktion eines Punktes. Durch ein dem obigen ähnliches Verfahren der impliziten Adjunktion kann man daher von der Lieschen Geometrie der einem festen linearen Komplex angehörenden Kugelsysteme zur *nicht euklidischen Flächentheorie* gelangen, indem man eine Kugel außerhalb des Komplexes zur *euklidischen,* indem man eine Kugel in dem Komplex adjungiert.

Zur *konformen Geometrie der Kugelsysteme* gelangt man ferner au

inem solchen Wege, indem man einen linearen Komplex adjungiert, dem ie Kugeln des Systems nicht angehören. Durch Adjunktion einer Kugel, ie von den Kugeln des Systems nicht berührt wird, gelangt man zur *aguerreschen Geometrie der Kugelsysteme.* Nun spielt in der konformen lächentheorie eine invariant mit der Fläche verbundene und diese beührende[9]) Kugel eine wichtige Rolle, die *Zentralkugel.* Für einen großen eil der Probleme der konformen Flächentheorie ist es sogar zweckmäßig, ieselbe auf das Studium des mit der Fläche verbundenen *Systems der entralkugeln* zu basieren. Ähnliche Verhältnisse hat W. Blaschke in er Laguerreschen Flächentheorie entdeckt, wo die *Mittenkugel* und das *Mittenkugelsystem* von gleicher Bedeutung sind. Um daher von der konormen und Laguerreschen Geometrie der Kugelsysteme zu der entsprehenden Flächentheorie zu gelangen, hat man die Bedingung dafür aufzutellen, daß ein Kugelsystem aus den Zentralkugeln, resp. Mittenkugeln des inen Enveloppenmantels besteht. Betrachtet man in der konformen Geometrie ie Kugelsysteme, deren Kugeln alle eine feste Kugel berühren, resp. urch einen festen Punkt gehen, so gelangt man zur *nichteuklidischen, resp. euklidischen Flächentheorie in Ebenenkoordinaten*; denn ie Kugeln des Systems sind dann die *Tangentialebenen* in den beiden eometrien.

Betrachtet man den einen Mantel eines Strahlensystems, dessen zweiter antel eine Fläche zweiter Ordnung ist, projektiv-geometrisch im Zusammenange des Strahlensystems, so treibt man durch implizite Adjunktion iner F_2 *nichteuklidische Flächentheorie,* und zwar *in den Linienkoordinaten der einen Schar der isotropen Tangenten der Fläche.*

Endlich eröffnet die entwickelte projektive und affine Geometrie der trahlensysteme Perspektiven auf eine *projektive und affine Flächentheorie n Linienkoordinaten.* Wie man konforme Flächentheorie durch das tudium des Systems der Zentralkugeln treibt, deren Enveloppenmantel ie Fläche ist, so kann man projektive und affine Flächentheorie treiben urch das Studium eines Systems invarianter Flächentangenten. Beispielseise ist in der projektiven Geometrie der Strahlensysteme die Bedingung afür leicht aufzustellen, daß die Strahlen mit einer Schar der *Tangenten on Darboux*[10]) auf dem einen der Brennmäntel zusammenfallen (Strahlensteme, deren Strahlen Asymptoten[11]) einer Fläche sind, müssen in der

[9]) Und zwar ist die Zentralkugel unter den die Fläche berührenden Kugeln adurch gekennzeichnet, daß sie die Fläche in einer Kurve durchschneidet, die im erührungspunkt zwei senkrechte Tangenten hat.

[10]) Vgl. etwa Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II, § 42.

[11]) Asymptoten = Tangenten an die Asymptotenlinien.

allgemeinen Theorie ausgeschlossen werden)[11a]. Eine Fläche ist dann (abgesehen von Ausnahmefällen) durch zwei quadratische Formen und eine Invariante bis auf projektive Transformationen bestimmt. Neben dieser Möglichkeit bestehen noch andere, deren Verfolgung sich vielleicht als zweckmäßiger erweist.

Ein entsprechender Weg würde zur affinen Flächentheorie führen.

Die allgemeine Theorie bietet häufig Gelegenheit, verschiedenen Geometrien angehörende Probleme gemeinsam zu lösen; außerdem gibt sie heuristische Mittel an die Hand, in den bisher noch weniger erforschten Geometrien die wichtigen geometrischen Begriffe aufzufinden.

Eine volle geometrische Ausnützung des Formelapparats und der Beziehungen zwischen den verschiedenen Geometrien muß späterer Arbeit vorbehalten bleiben. In manchen Teilen sind die folgenden Ausführungen vorerst nur ein Programm, in andern sind sie schon umfangreicher, je nachdem, welche Ergebnisse bereits vorliegen.

Ab und zu sind spezielle geometrische Resultate eingestreut, teilweise ohne Beweis.

Bei meiner Arbeit hat mich Herr W. Blaschke durch Rat und Anregung so vielfach unterstützt, daß ich davon Abstand nehmen muß, dies im einzelnen hervorzuheben.

§ 1.

Grundbegriffe.

Im folgenden sollen griechische Indizes ($\mu, \nu, \sigma, \varrho$ usw.) von 1 bis 6 laufen, lateinische ($i, k, l, \ldots$) von 1 bis 2. Über doppelt vorkommende Indizes wird summiert.

Um gleichzeitig die Grundbegriffe und -tatsachen der projektiven Liniengeometrie und der Lieschen Kugelgeometrie einzuführen, sollen überall, wo solche der ersteren zuerst auftreten, die ihnen entsprechenden der letzteren in Klammern dahintergesetzt werden. Unter Kugeln sind in der Lieschen Geometrie immer *orientierte Kugeln* zu verstehen. Die sechs Linien-(Kugel-)koordinaten $\mathfrak{p}^\varrho$, die nicht alle gleichzeitig verschwinden dürfen, sind an eine homogene quadratische Gleichung gebunden. In der Liniengeometrie verwendet man gewöhnlich solche „*Normalkoordinaten*", daß diese Gleichung von der Form

$$\mathfrak{p}^1\mathfrak{p}^4 + \mathfrak{p}^2\mathfrak{p}^5 + \mathfrak{p}^3\mathfrak{p}^6 = 0 \tag{1a}$$

[11a]) Mit diesen Strahlensystemen und einer auf ihrem Studium basierenden projektiven Flächentheorie wird sich eine demnächst erscheinende Arbeit des Verfassers beschäftigen.

st. ⟨In der Lieschen Kugelgeometrie benutzt man solche Koordinaten, laß die Gleichung die Normalform annimmt:

1b) $$(\mathfrak{p}^1)^2+(\mathfrak{p}^2)^2+(\mathfrak{p}^3)^2+(\mathfrak{p}^4)^2-(\mathfrak{p}^5)^2-(\mathfrak{p}^6)^2=0\rangle.$$

Hier sollen *allgemeine projektive Linienkoordinaten* eingeführt werden, die rgendwelche lineare Funktionen der „Normalkoordinaten" sind. Die Gleichung (1) wird dann die allgemeine Gestalt annehmen:

2) $$a_{\mu\nu}\mathfrak{p}^\mu\mathfrak{p}^\nu=0,$$

vo die $a_{\mu\nu}$ irgendwelche Zahlen mit der Determinante

3) $$|a_{\mu\nu}|=\Delta\neq 0$$

ind. Sollen diese allgemeinen Linien-⟨Kugel⟩-koordinaten reell sein, so muß die Form (2) denselben Trägheitsindex[12]) haben, wie die Form (1a)⟨(1b)⟩, ieser Index ist aber 3⟨2⟩.

Bei den projektiven Abbildungen ⟨höheren Kugeltransformationen des Raumes⟩ werden die $\mathfrak{p}^\varrho$ den homogenen linearen Transformationen $\mathfrak{p}^\varrho=c^\varrho_\sigma\mathfrak{p}^{\sigma*}$ unterworfen, die die Gleichung (2) invariant lassen. Da die Koordinaten homogen sind, müssen Ausdrücke invarianten Charakters nicht nur gegenüber diesen Transformationen, sondern auch den „*Umnormierungen*" der Koordinaten gegenüber unverändert bleiben:

4) $$\mathfrak{p}^\varrho=\lambda(\mathfrak{p}^1,\mathfrak{p}^2,\mathfrak{p}^3,\mathfrak{p}^4,\mathfrak{p}^5,\mathfrak{p}^6)\cdot\mathfrak{p}^{\varrho*},$$

wo λ eine beliebige Funktion seiner Argumente ist.

Die Bildung invarianter Ausdrücke vollziehen wir zweckmäßigerweise in zwei Schritten:

I. Bildung von Invarianten gegenüber den linearen Transformationen der $\mathfrak{p}^\varrho$, die die Form $a_{\mu\nu}\mathfrak{p}^\mu\mathfrak{p}^\nu$ absolut invariant lassen (*Halbinvarianten*).

II. Bildung von Ausdrücken die außerdem invariant gegenüber den Umnormierungen (4) sind.

Offenbar ist die Mannigfaltigkeit der Transformationen aus I. und II. mit der der obigen Transformationen identisch.

Die Strahlen ⟨Kugeln⟩, die einer linearen Gleichung

5) $$q_\nu\mathfrak{p}^\nu=0$$

genügen, gehören einem *linearen Komplex* an. Unter Einführung neuer Größen q^μ können wir diese Gleichung in der Form schreiben:

6) $$a_{\mu\nu}q^\mu\mathfrak{p}^\nu=0.$$

[12]) Trägheitsindex = Zahl der negativen Vorzeichen in dem Aggregat vollständiger Quadrate, in das man die Form durch reelle Transformationen überführen kann.

Die Größen q^μ sind die *Koordinaten des linearen Komplexes*. Für zwei lineare Komplexe ζ^μ, η^μ ist der Ausdruck

$$(7) \qquad (\zeta, \eta) = a_{\mu\nu}\zeta^\mu \eta^\nu,$$

den wir als ihr *skalares Produkt* bezeichnen wollen, halbinvariant. Für sechs lineare Komplexe $\zeta^\mu_{(1)} \dots \zeta^\mu_{(6)}$ ist die Determinante $|\zeta_{(1)}, \zeta_{(2)}, \zeta_{(3)}, \zeta_{(4)}, \zeta_{(5)}, \zeta_{(6)}|$ halbinvariant. Nach dem Multiplikationssatz der Determinanten läßt sie sich durch die skalaren Produkte der Komplexe ausdrücken:

$$(8) \qquad \Delta \cdot |\zeta_{(1)}\zeta_{(2)}\zeta_{(3)}\zeta_{(4)}\zeta_{(5)}\zeta_{(6)}|^2 = |(\zeta_{(\varrho)}, \zeta_{(\sigma)})|.$$

Da die Komplexkoordinaten sich wie die Linienkoordinaten transformieren, können wir die Strahlen als spezielle der Gleichung (2) $\{(\mathfrak{p}\mathfrak{p}) = 0\}$ genügende Komplexe auffassen. In der Tat schneiden ja alle Strahlen $\mathfrak{p}$, die einer Gleichung (5) $(\mathfrak{q}\mathfrak{p}) = 0$ genügen, die also dem Komplex $\mathfrak{q}$ angehören, im Falle $(\mathfrak{q}\mathfrak{q}) = 0$ eine feste Gerade, deren Koordinaten gerade die q^μ sind. Wir werden daher im folgenden häufiger den Ausdruck Komplex als Sammelnamen für die „eigentlichen" Komplexe und die Geraden ⟨Kugeln⟩ als die „ausgearteten" Komplexe verwenden.

Alle Geraden $\mathfrak{p}$ mit Koordinaten von der Form

$$(9) \qquad \mathfrak{p}^\varrho = \alpha\mathfrak{a}^\varrho + \beta\mathfrak{b}^\varrho,$$

wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei feste sich schneidende Geraden sind,

$$[(\mathfrak{a}\mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = 0]$$

und α und β zwei nicht gleichzeitig verschwindende Parameter, bilden ein *Büschel*.

Gleichungen von der Art von (9) werden wir künftig symbolisch mit Unterdrückung der Koordinatenindizes in der Form $\mathfrak{p} = \alpha\mathfrak{a} + \beta\mathfrak{b}$ schreiben.

Vier einem Büschel angehörige Strahlen

$$\mathfrak{p}_{(\sigma)} = \alpha_{(\sigma)}\mathfrak{a} + \beta_{(\sigma)}\mathfrak{b} \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4)$$

haben eine Invariante, das *Doppelverhältnis*

$$(10) \qquad D = \frac{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3)}{(\alpha_1\beta_4 - \alpha_4\beta_1)(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3)}.$$

[Die entsprechende Invariante von vier Kugeln eines Büschels werden wir, um später Verwechselungen zu vermeiden, als *Winkelverhältnis* bezeichnen]. Den Ausdruck

$$(11) \qquad \varphi = \frac{i}{2}\log D \qquad (i = \sqrt{-1})$$

bezeichnen wir als das *logarithmische Doppel-*[*Winkel-*]*verhältnis*. Für φ gilt die Formel

$$(12) \qquad \operatorname{ctg}\varphi = i\frac{1+D}{1-D}.$$

Die vier Elemente des Büschels haben *harmonisches Doppel-*[*Winkel-*]*verhältnis*, wenn

13) $$D = -1, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{ist.}$$

§ 2.

Allgemeine Theorie der Strahlen- und Kugelsysteme.

Wir nehmen an, daß der Strahl $\mathfrak{p}$ des Systems als Funktion zweier Parameter u^1 und u^2 gegeben sei. Da wir zum Teil auch komplexe Geometrie treiben werden, seien die Funktionen als analytisch vorausgesetzt. Für die meisten Resultate wird man mit weniger Voraussetzungen auskommen. Für die einzelnen von den Funktionen $\mathfrak{p}^\varrho(u^1, u^2)$ und ihren Ableitungen abhängigen Größen führen wir im Hinblick auf ihr Verhalten gegenüber Parametertransformationen die üblichen Bezeichnungen der Tensorrechnung ein. Zwei Größen bilden einen *kontravarianten Vektor*, wenn sie sich transformieren wie die Differentiale du^i. Ist $s_i du^i$ invariant, so bilden die s_i einen *kovarianten Vektor* und so fort. Setzen wir $\mathfrak{p} : \partial u^i = \mathfrak{p}_i$, so bilden je zwei entsprechende Koordinaten von $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ einen kovarianten Vektor. Handelt es sich nur um von dem Strahlensystem abhängige Größen, so können wir die Transformationen (4) in der Form schreiben:

14) $$\mathfrak{p} = \lambda(u^1, u^2) \cdot \mathfrak{p}^*.$$

Es gilt

15) $$(\mathfrak{p}\mathfrak{p}) = (\mathfrak{p}\mathfrak{p}_i) = 0$$

identisch in den u^i. Ferner ist

16) $$(d\mathfrak{p}\, d\mathfrak{p}) = (\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_k)\, du^i du^k = g_{ik} du^i du^k$$

eine bis auf einen multiplikativen Faktor invariante Differentialform. Betrachten wir eine durch $\mathfrak{p}$ gehende Regelfläche ⟨Kanalfläche⟩ $\mathfrak{q}(t)$, wo t ein Parameter ist, in der Umgebung von $\mathfrak{p}$: $\left(\mathfrak{q}(t) = \mathfrak{p} + t\, d\mathfrak{p} + \frac{t^2}{2} d^2\mathfrak{p} \ldots\right)$, und berücksichtigen wir quadratische Glieder in t, so erkennen wir aus $(\mathfrak{p}\mathfrak{q}) = 0$ oder $(\mathfrak{p}\, d^2\mathfrak{p}) = -(d\mathfrak{p}\, d\mathfrak{p}) = 0$, daß die Nullscharen von (16) die *Torsen* ⟨*Berührscharen*⟩ des Systems sind. Wir schließen den Fall $g = 0$ aus ($g = |g_{ik}|$), für den die beiden Scharen der Torsen zusammenfallen. Diese Systeme sind bekanntlich die aus einer der beiden Scharen von Asymptotentangenten ⟨Krümmungskugeln⟩ einer Fläche bestehenden, bei denen die Mäntel der Brennfläche ⟨Enveloppe⟩ zusammenfallen[13a]). Die Form g_{ik} führen wir

[13a]) Vgl. Fußnote 11[a]).

als Fundamentalform ein, auf die wir künftig kovariante Ableitung sowie Herauf- und Herunterziehen der Indizes unter Verwendung des zu g_{ik} reziproken Tensors g^{ik} beziehen werden. Wir kümmern uns vorläufig nicht darum, daß g_{ik} nicht absolut invariant ist. Später werden wir g_{ik} „normieren“ und dann die normierte Form als Fundamentalform benutzen. Nach dem Lemma von Ricci[14]) ist

$$g_{ikr} = 0 \tag{17}$$

und daraus leitet man leicht ab

$$(\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_{ik}) = 0 \text{ [14a]} \tag{18}$$

(Angehängte neue Indizes bedeuten kovariante Ableitung). Als die sechs linear unabhängigen „*Grundkomplexe*“[15]) führen wir neben $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ noch drei Strahlen [Kugeln] $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ und $\mathfrak{z}$ ein, die an die in der folgenden Tabelle angegebenen Bedingungen geknüpft sind. Dort sind die skalaren Produkte, die die Komplexe miteinander bilden, aufgeführt.

(19)

	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{p}_k$	$\mathfrak{v}$	$\bar{\mathfrak{v}}$	$\mathfrak{z}$
$\mathfrak{p}$	0	0	0	0	-1
$\mathfrak{p}_i$	0	g_{ik}	0	0	0
$\mathfrak{v}$	0	0	0	1	0
$\bar{\mathfrak{v}}$	0	0	1	0	0
$\mathfrak{z}$	-1	0	0	0	0

Aus dem Determinantensatz (8) leiten wir leicht die Beziehung her:

$$\Delta \cdot |\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{v}, \bar{\mathfrak{v}}, \mathfrak{z}|^2 = g. \tag{20}$$

Die Grundkomplexe sind wegen $g \neq 0$ also linear unabhängig. Durch die in der Tabelle auftretenden Bedingungen sind $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ und $\mathfrak{z}$ nicht völlig festgelegt.

Die Gesamtheit der Strahlen $\mathfrak{t}[(\mathfrak{t}\mathfrak{t}) = 0]$, die den Gleichungen

$$(\mathfrak{t}\mathfrak{p}) = (\mathfrak{t}\mathfrak{p}_i) = 0 \tag{21}$$

[14]) Vgl. etwa Blaschke, Differental-Geometrie II, § 56.
[14a]) Vgl. die unter [4]) zitierte Arbeit, Formel (28).
[15]) Die natürlich auch Strahlen sein können.

enügen, erfüllen die beiden Büschel der Tangenten [berührenden Kugeln] n die Mäntel in den zum Systemstrahl gehörigen Flächenelementen der Enveloppe. Denn führt man die Parameter u, v der Torsen ein, so sind $\mathfrak{p} + \beta \mathfrak{p}_u$ und $\gamma \mathfrak{p} + \delta \mathfrak{p}_v$ die Tangentenbüschel der beiden Torsen in den ugehörigen Brennpunkten[16]).

Wegen $(\mathfrak{v}\bar{\mathfrak{v}}) \neq 0$ sind $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ Tangenten an verschiedene Mäntel. m übrigen sind beide noch in einem Freiheitsgrad willkürlich. Legt man $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ endgültig fest, so ist damit nach (19) auch $\mathfrak{z}$ völlig bestimmt. Gibt man umgekehrt den Strahl $\mathfrak{z}$ den Bedingungen

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{z}) = -1, \quad (\mathfrak{p}_i\mathfrak{z}) = 0 \tag{22}$$

genügend vor, so sind dadurch $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ mit bestimmt. Normiert man $\mathfrak{p}$, so ist wegen $(\mathfrak{p}\mathfrak{z}) = -1$ auch $\mathfrak{z}$ normiert. Die Normierung von $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ st dann aber durch $(\mathfrak{v}\bar{\mathfrak{v}}) = 1$ noch nicht festgelegt; es sind noch Umormierungen von der Form

$$\mathfrak{v} = \lambda \mathfrak{v}^* \qquad \bar{\mathfrak{v}} = \frac{1}{\lambda} \bar{\mathfrak{v}}^* \tag{23}$$

möglich, wo λ eine willkürliche Funktion von u^1 und u^2 ist. Wir stellen folgende Tabelle der skalaren Produkte der zweiten kovarianten Ableitungen $\mathfrak{p}_{ik}$ mit den Grundkomplexen auf:

(24)

	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{p}_l$	$\mathfrak{v}$	$\bar{\mathfrak{v}}$	$\mathfrak{z}$
$\mathfrak{p}_{ik}$	$-g_{ik}$	0	c_{ik}	$\bar{c}_{ik}$	$-a_{ik}$

Die drei letzten Tensoren erfahren hier ihre Definition. Außerdem führen wir noch den schiefsymmetrischen Tensor[17])

$$e_{ik} = \sqrt{\Delta} \cdot |\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{v}, \mathfrak{v}, \mathfrak{z}| \tag{25}$$

ein, seine Komponenten sind:

$$e_{11} = 0, \quad e_{12} = \pm\sqrt{g}, \quad e_{21} = \mp\sqrt{g}, \quad e_{22} = 0. \tag{26}$$

Wir können uns für das eine Vorzeichen, etwa das obere entscheiden[18]). Für den Tensor e^{ik} ist:

$$e^{11} = 0, \quad e^{12} = \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad e^{21} = -\frac{1}{\sqrt{g}}, \quad e^{22} = 0.$$

[16]) Die Torsen schneiden den Enveloppenmantel in ihren Rückkehrkanten.

[17]) e_{ik} ist nur gegenüber gleichsinnigen Parametersubstitutionen invariant.

[18]) Das doppelte Vorzeichen hängt mit der willkürlichen Vertauschbarkeit von $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ zusammen.

Ferner gelten die Gleichungen

$$e_{ir}\,e^{kr} = g_i^k = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \tag{27}$$

$$\frac{1}{2}\,e_{ik}\,e^{ik} = \frac{1}{2}\,g_{ik}\,g^{ik} = 1. \tag{28}$$

Wir stellen endlich noch folgende Tabelle skalarer Produkte auf:

(29)

	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{p}_i$	$\mathfrak{v}$	$\bar{\mathfrak{v}}$	$\mathfrak{z}$
$\mathfrak{v}_l$	0	$-c_{il}$	0	$-n_l$	$-w_l$
$\bar{\mathfrak{v}}_l$	0	$-\bar{c}_{il}$	$+n_l$	0	$-\bar{w}_l$
$\mathfrak{z}_l$	0	$+a_{il}$	$+w_l$	$+\bar{w}_l$	0

Die Vektoren n_l, w_l; $\bar{w}_l$ werden hier definiert, die übrigen Beziehungen lassen sich aus (19) unter Beachtung von (24) durch Differenzieren ableiten. Wir können jetzt die Ableitungsgleichungen aufstellen:

$$\mathfrak{p}_{ik} = a_{ik}\mathfrak{p} + \bar{c}_{ik}\mathfrak{v} + c_{ik}\bar{\mathfrak{v}} + g_{ik}\mathfrak{z} \tag{30}$$

$$\mathfrak{v}_l = w_l\mathfrak{p} - c_l^s\,\mathfrak{p}_s - n_l\mathfrak{v} \tag{31}$$

$$\bar{\mathfrak{v}}_l = \bar{w}_l\mathfrak{p} - \bar{c}_l^s\,\mathfrak{p}_s - n_l\bar{\mathfrak{v}} \tag{32}$$

$$\mathfrak{z}_l = a_l^s\,\mathfrak{p}_s + \bar{w}_l\mathfrak{v} + w_l\bar{\mathfrak{v}} \tag{33}$$

deren Richtigkeit man durch skalare Multiplikation mit den „Grundkomplexen" nachweist.

die Integrabilitätsbedingungen des Systems können wir mit Hilfe des Tensors e^{ik} folgendermaßen invariant schreiben:

$$e^{kl}\mathfrak{p}_{ikl} = K e_{si}\mathfrak{p}^s, \qquad e^{ik}\mathfrak{v}_{ik} = 0, \qquad e^{ik}\bar{\mathfrak{v}}_{ik} = 0, \qquad e^{ik}\mathfrak{z}_{ik} = 0\ ^{19}). \tag{34}$$

Hier bedeutet K das Gaußische Krümmungsmaß der Form g_{ik}. Drückt man in den Bedingungen (34) mit Hilfe der Ableitungsgleichungen (30)

[19]) Diese Gleichungen kommen auf die gewöhnlichen, nicht invariant geschriebenen Integrabilitätsbedingungen $\frac{\partial^3\mathfrak{p}}{\partial u^i\partial u^k\partial u^l} = \frac{\partial^3\mathfrak{p}}{\partial u^i\partial u^l\partial u^k}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial u^i\partial u^k} = \frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial u^k\partial u^i}$ usw. hinaus. Vgl. darüber W. Blaschke, Differential-Geometrie II, S. 151–152, Formeln (102), (105*).

is (33) und der aus ihnen durch Differenzieren gewonnenen Formeln die bleitungen der Grundkomplexe durch diese selbst aus und setzt schließlich ie einzelnen Faktoren derselben gleich Null, so wird man auf sieben wesentliche Relationen zwischen den Tensoren $g_{ik}, c_{ik}, \bar{c}_{ik}, a_{ik}, w_i, \bar{w}_i$ und n_i geführt:

35) 1) $K = e^{ik} e^{pq} c_{ip} \bar{c}_{kq} - a_i^i$

36) 2) $e^{kl}(w_{kl} + w_k n_l + c_l^s a_{sk}) = 0$

37) 3) $e^{kl}(\bar{w}_{kl} - \bar{w}_k n_l + \bar{c}_l^s a_{sk}) = 0$

38) 4) $e^{kl}(c_{ikl} + c_{ik} n_l + g_{ik} w_l) = 0$

39) 5) $e^{kl}(\bar{c}_{ikl} - \bar{c}_{ik} n_l + g_{ik} \bar{w}_l) = 0$

40) 6) $e^{kl}(a_{ikl} + c_{ik} \bar{w}_l + \bar{c}_{ik} w_l) = 0$

41) 7) $e^{kl}(n_{kl} + g^{rs} c_{kr} \bar{c}_{ls}) = 0$

Diese Gleichungen bekommen erst invarianten Charakter, wenn erstens urch zwei geeignete hinzukommende Gleichungen, die in $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ und $\mathfrak{z}$ teckende Willkür von zwei Freiheitsgraden behoben ist, und wenn zweitens urch zwei weitere Gleichungen die Normierung von $\mathfrak{p}$ und die Normieung von $\mathfrak{v}, \bar{\mathfrak{v}}$ [vgl. (23)] festgelegt ist. Da wir sowohl die Festlegung on $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ und $\mathfrak{z}$, wie auch die Normierung für die einzelnen in der Tafel ngeführten Geometrien in verschiedener Weise vornehmen werden, wollen ir im folgenden Paragraphen einige Formeln ableiten, ohne jene vier zuätzlichen Forderungen aufzustellen, obgleich dieselben die Formeln für ie projektive Geometrie der Strahlensysteme vereinfachen.

§ 3.

Invariantentheorie dreier quadratischer Formen. Asymptoten- und Krümmungslinien.

Drei quadratische Formen g_{ik}, c_{ik}, $\bar{c}_{ik}$ haben fünf simultane Invarinten, deren Repräsentanten wir unter Zugrundelegung von g_{ik} als Fundamentalform folgendermaßen schreiben können:

42)
$$\begin{cases} \frac{1}{2} g^{ik} c_{ik} = h, & \frac{c}{g} = k, \\ \frac{1}{2} g^{ik} \bar{c}_{ik} = \bar{h}, & \frac{\bar{c}}{g} = \bar{k}, \\ \frac{i}{2} e^{lk} g^{pq} c_{lp} \bar{c}_{kq} = d & (i = \sqrt{-1}). \end{cases}$$

[20]) h und k sind die beiden simultanen Invarianten von g_{ik} und c_{ik}, ebenso und $\bar{k}$ die von g_{ik} und $\bar{c}_{ik}$.

c und $\bar{c}$ sind die Determinanten der Formen c_{ik} und $\bar{c}_{ik}$. Man weist leicht[21]) die Formeln nach

$$\frac{c}{g} \equiv \frac{1}{2} e^{ik} e^{pq} c_{ip} c_{kq} \tag{43}$$

$$g^{rs} c_{ir} c_{ks} = 2h c_{ik} - k g_{ik}. \tag{44}$$ [22])

Analoge Gleichungen erhält man durch Vertauschung von c_{ik} mit $\bar{c}_{ik}$. Zu je zweien der Formen gibt es eine weitere *Jacobische Form*. Die drei Jacobischen Formen sind die folgenden:

$$p_{ik} = \frac{1}{2}(e_{ir} c_k^r + e_{kr} c_i^r), \tag{45}$$

$$\bar{p}_{ik} = \frac{1}{2}(e_{ir} \bar{c}_k^r + e_{kr} \bar{c}_i^r), \tag{46}$$

$$f_{ik} = \frac{i}{2} e_{rs}(c_i^r \bar{c}_k^s - c_k^s \bar{c}_i^r). \tag{47}$$

Es gelten folgende Gleichungen:

$$g^{ik} p_{ik} = 0, \qquad g^{ik} \bar{p}_{ik} = 0, \tag{48}$$

$$c^{ik} p_{ik} = 0, \qquad \bar{c}^{ik} \bar{p}_{ik} = 0, \tag{49}$$

$$\frac{i}{2} e^{ik} g^{pq} p_{ip} \bar{p}_{kq} = d, \tag{50}$$

$$g^{ik} f_{ik} = d. \tag{51}$$

Die in der Integrabilitätsbedingung (35) vorkommende Größe

$$j = \frac{1}{2} e^{ik} e^{pq} c_{ip} \bar{c}_{kq}$$

hängt mit den Invarianten (42) auf folgende Weise zusammen:

$$(j + h\bar{h})^2 = (h^2 - k)(\bar{h}^2 - \bar{k}) + d^2. \tag{52}$$

Wir wissen, daß $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{v}$ zwei nicht zusammenfallende Strahlen des Tangentenbüschels auf dem einen, dem „ersten“ Enveloppenmantel sind. Wenn wir den Fall ausschließen, daß $\mathfrak{v}$ gerade mit einer der Asymptoten ⟨Krümmungskugeln⟩ der Mäntel zusammenfällt, können wir die beiden Asymptoten des ersten Mantels in der Form $\mathfrak{t} = \mathfrak{p} + \gamma \mathfrak{v}$ ansetzen, wo γ ein Skalar ist. Die Asymptoten haben die Eigenschaft, auch in einem Nachbarflächenelement des Mantels noch Tangente zu sein, es muß also

[21]) Am besten durch Rückgang auf Komponenten in den Parametern der Torse $g_{11} = g_{22} = 0$.

[22]) Diese Formel ist dieselbe, die in der bewegungsgeometrischen Flächentheorie die Form des sphärischen Bildes durch die beiden Fundamentalformen ausdrückt.

ach (21) außer $(\mathfrak{t}\mathfrak{t}) = 0$, $(\mathfrak{t}\mathfrak{p}) = (\mathfrak{t}\mathfrak{p}_i) = 0$ noch $(\mathfrak{t}\, d\mathfrak{p}_i) = (\mathfrak{p}\, d\mathfrak{p}_i) + \gamma(\mathfrak{v}\, d\mathfrak{p}_i) = 0$
ein oder es muß

53) $$(-g_{ik} + \gamma c_{ik})\, du^k = 0$$

ür die Richtung der Asymptotenlinie $du^1 : du^2$ gelten. Sollen die beiden
Gleichungen (53) eine Lösung γ haben, so muß $g_{ik}\, du^k$ proportional zu
$_{ik}\, du^k$ sein. Diese Bedingung läßt sich in der Form schreiben:

54) $$\frac{1}{2}\, e^{rs}(g_{ir} c_{ks} - g_{ks} c_{ir})\, du^i\, du^k = 0.$$

Nach (45) erhalten wir

55) $$p_{ik}\, du^i\, du^k = 0$$

ls *Differentialgleichung der Asymptotenlinien* ⟨*Krümmungslinien*⟩ des
ersten Mantels. Für den zweiten Mantel bekommt man analog:

$$\bar{p}_{ik}\, du^i\, du^k = 0.$$

Nach (48) (49) wird bei Einführung der Asymptotenlinien des ersten
Mantels als Parameterkurven $p_{11} = p_{22} = g_{12} = c_{12} = 0$ und aus (53) er-
hält man für $du^1 = 1$, $du^2 = 0$, für γ den Wert $\frac{c_{11}}{g_{11}}$, für $du^1 = 0$,
$du^2 = 1$ aber $\gamma = \frac{g_{22}}{c_{22}}$.

Bestimmen wir die Größen r und r' durch

56) $$h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right), \qquad k = \frac{1}{rr},$$

so ist bei Anwendung der speziellen Parameter gerade

$$r = g_{11} : c_{11}, \qquad r' = g_{22} : c_{22}.$$

Führen wir für den zweiten Mantel analoge Größen $\bar{r}, \bar{r}'$ ein, so sind *die
vier Asymptoten der Mäntel* gegeben durch:

56a) $$\mathfrak{p} + r\mathfrak{v}; \qquad \mathfrak{p} + r'\mathfrak{v}; \qquad \mathfrak{p} + \bar{r}\bar{\mathfrak{v}}; \qquad \mathfrak{p} + \bar{r}'\bar{\mathfrak{v}}.$$

Nehmen wir die beiden Strahlen $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ und die zu einer bestimmten
Fortschreitungsrichtung gehörigen unendlich benachbarten Strahlen $\mathfrak{v} + d\mathfrak{v}$
und $\bar{\mathfrak{v}} + d\bar{\mathfrak{v}}$, so werden alle vier nach (19), (29) von $\mathfrak{p}$ geschnitten. Wir
fragen: Wann gibt es noch einen unendlich benachbarten Systemstrahl $\mathfrak{p} + \delta\mathfrak{p}$,
der gleichfalls alle vier Strahlen schneidet? Offenbar muß dann

56b) $$(\delta\mathfrak{p}\, d\mathfrak{v}) = -c_{ik}\, \delta u^i\, du^k = 0,$$
$$(\delta\mathfrak{p}\, d\bar{\mathfrak{v}}) = -\bar{c}_{ik}\, \delta u^i\, du^k = 0$$

sein.

Sollen beide Gleichungen für nicht gleichzeitig verschwindende δu^i
erfüllt sein, so muß $c_{ik}\, du^k$ proportional sein zu $\bar{c}_{ik}\, du^k$. Diese Bedingung

können wir ebenso, wie wir oben mit der entsprechenden Bedingung für die Asymptoten = ⟨Krümmungs =⟩linien verfuhren (vgl. (54)), in der Form schreiben:

$$\frac{1}{2} e^{rs} (c_{ir} \bar{c}_{ks} - c_{ks} \bar{c}_{ir}) du^i du^k = 0.$$

Nach (47) werden die Strahlen $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v} + d\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$, $\bar{\mathfrak{v}} + d\bar{\mathfrak{v}}$ also nur, wenn wir in einer der Nullrichtungen der Form $f_{ik} du^i du^k$ fortschreiten, von $\mathfrak{p}$ und noch einem Nachbarstrahl des Systems $\mathfrak{p} + \delta\mathfrak{p}$ geschnitten. Die Null-scharen dieser Form hängen von der Festlegung von $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ ab. Wir wollen sie daher als die zu den Systemen der Strahlen $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ gehörigen *Hauptscharen* bezeichnen und die zugehörigen Kurven auf den Mänteln die *Hauptkurven*. Indem wir die Gleichungen (56b) als lineare Gleichungen in du^1 und du^2 ansehen, die Lösungen in nicht gleichzeitig verschwindenden du^i ergeben müssen, erkennen wir, daß die Richtung δ die der zweiten Hauptschar ist.

Vier Fortschreitungsrichtungen $du_1 : dv_1$, $du_2 : dv_2$, $du_3 : dv_3$, $du_4 : dv_4$ in dem Strahlensystem haben eine Invariante, das *Doppelverhältnis*:

$$(57) \qquad D = \frac{(du_1 dv_3 - du_3 dv_1)(du_3 dv_4 - du_4 dv_3)}{(du_1 dv_4 - du_4 dv_1)(du_3 dv_2 - du_2 dv_3)}.$$

Es ist gleich dem Doppelverhältnis der vier zu den Fortschreitungsrichtungen gehörigen Tangenten auf einem der Mäntel. Für das logarithmische Doppel-⟨Winkel-⟩verhältnis φ der zu den Nullscharen(-linien) der Formen $r_{ik} du^i du^k = 0$ und $s_{ik} du^i du^k = 0$ gehörigen Fortschreitungsrichtungen erhält man:

$$(58) \qquad \operatorname{ctg} \varphi = i \frac{e^{ik} e^{pq} r_{ip} s_{kq}}{\sqrt{e^{ik} e^{pq} r_{ip} r_{kq}} \cdot \sqrt{e^{ik} e^{pq} s_{ip} s_{kq}}}.$$

Daraus folgt:

$$(59) \qquad e^{ik} e^{pq} r_{ip} s_{kq} = 0$$

ist die *Bedingung für harmonische Lage* der zu r_{ik} und s_{ik} gehörigen Nullinien. Wegen $e^{is} e^{kr} p_{sr} = - p^{ik}$ sind nach (48), (49) die Nullinien der Formen g_{ik} und c_{ik} auf dem ersten Mantel harmonisch zu den Asymptotenlinien p_{ik} ⟨haben harmonisches Winkelverhältnis zu den Krümmungslinien⟩. Die Nulllinien von g_{ik} und $\bar{c}_{ik}$ sind harmonisch zu den Asymptotenlinien $\bar{p}_{ik}$ auf dem zweiten Mantel. Alle diese Kurven bilden also *konjugierte Netze*. Nach (50) erkennt man leicht $d = 0$ als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich auf den Mänteln die Asymptotenlinien ⟨Krümmungslinien⟩ entsprechen. Diese Gleichung kennzeichnet also die *W-Strahlen-⟨W-Kugel-⟩Systeme*.

Eine Relation

$$(59) \qquad \alpha g_{ik} + \beta p_{ik} + \gamma \bar{p}_{ik} = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma \text{ skalar})$$

ann, wie man durch Multiplikation mit g^{ik} erkennt, nur für W-Strahlenysteme bestehen. Für $d \neq 0$ können wir also für den symmetrischen ensor a_{ik} einen linearen Ansatz in diesen drei Tensoren machen, wo die oeffizienten Invarianten sind. Aus den Gleichungen (35), (36), (37) önnen wir dann diese Invarianten und damit a_{ik} aus den übrigen in den ntegrabilitätsbedingungen vorkommenden Tensoren berechnen. Multiplieren wir (38) und (39) mit e^{is}, so bekommen wir:

$$w_s = e_{si} e^{kl} c^i_{kl} + e_{si} e^{kl} c^i_k n_l, \tag{60}$$

$$\bar{w}_s = e_{si} e^{kl} \bar{c}^i_{kl} - e_{si} e^{kl} \bar{c}^i_k n_l. \tag{61}$$

ür $d \neq 0$ können wir also a_{ik}, w_l und $\bar{w}_l$ aus den Tensoren g_{ik}, c_{ik}, $\bar{c}_{ik}$, n_l nd ihren Ableitungen berechnen. Wir wollen nun noch die Differentialleichung der Kurven von Darboux auf den Mänteln aufstellen. ⟨Die nalogen Kurven der Lieschen Geometrie sollen *zyklidische* Kurven heißen.⟩ ie lassen sich nach E. Čech folgendermaßen kennzeichnen: Zieht man durch ier konsekutive Punkte einer Darboux-Kurve die vier Asymptoten der läche von einer der beiden Scharen, so werden alle vier von der durch en Ausgangspunkt gehenden Asymptote der andern Schar geschnitten. an weist leicht nach, daß $(\mathfrak{p} + r\mathfrak{v}, \mathfrak{p} + r'\mathfrak{v}) = 0$, $(\mathfrak{p} + r\mathfrak{v}, d\langle\mathfrak{p} + r'\mathfrak{v}\rangle) = 0$, $\mathfrak{p} + r\mathfrak{v}$, $d^2\langle\mathfrak{p} + r'\mathfrak{v}\rangle) = 0$ identisch für jede Fortschreitungsrichtung erüllt ist. *Die Differentialgleichung der Darbouxkurven* ist somit:

$$(\mathfrak{p} + r\mathfrak{v}, d^3\langle\mathfrak{p} + r'\mathfrak{v}\rangle) = s_{ikl}\, du^i du^k du^l = 0 \tag{62}$$

ierin kann man auch r und r' vertauschen. Analoge Gleichungen gelten ür den andern Mantel.

Die hier abgeleiteten Formeln sind für alle im folgenden behandelten eometrien ohne weiteres anwendbar. Wir werden uns jetzt den speziellen ällen zuwenden. Durch die in der Tafel angegebenen Beziehungen wischen den Tensoren kommt man zu den angeführten Geometrien als pezialfällen der allgemeinen Theorie. Durch diese Beziehungen zwischen en Tensoren werden auch jedesmal die Strahlen ⟨Kugeln⟩ $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ und $\mathfrak{z}$ estgelegt. Z. B. ist für die projektive Geometrie der Strahlensysteme $c^i_i = h = 0$, $\frac{1}{2}\bar{c}^i_i = \bar{h} = 0$ gesetzt. Das heißt aber nach (24) $(\mathfrak{v}, g^{ik}\mathfrak{p}_{ik}) = 0$, $\bar{\mathfrak{v}}, g^{ik}\mathfrak{p}_{ik}) = 0$, und damit sind die noch fehlenden Bestimmungsgleichungen ür die Strahlen $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ gegeben, und auch $\mathfrak{z}$ ist festgelegt.

Die nähere Erläuterung wird in den den einzelnen Fällen beigechriebenen Paragraphen angegeben werden.

Zur Abkürzung ist noch gesetzt:

$$\begin{cases} m_i = w_i + c^s_i n_s, \\ \bar{m}_i = \bar{w}_i - \bar{c}^s_i n_s. \end{cases} \tag{63}$$

Tafel der verschiedenen Geometrien.

Projektive Geometrie der Strahlensysteme § 4	$c_i^i = \bar{c}_i^i = 0$
Liesche Geometrie der Kugelsysteme § 4	
Konforme Flächentheorie (Punktkoordinaten) § 5	$c_{ik} = \bar{c}_{ik}$ $\quad c_i^i = 0$ $w_l = \bar{w}_l$ $\quad n_l = 0$
Laguerresche Flächentheorie (Ebenenkoordinaten) § 5	$\bar{c}_{ik} = 0$ $\quad c_i^i = 0$ $\bar{w}_l = 0$ $\quad n_l = 0$
Konforme Geometrie der Kugelsysteme § 6	$a_{ik} = -\frac{1}{2} g_{ik}, \quad w_l = \bar{w}_l = 0$
Laguerresche Geometrie der Kugelsysteme § 6	$a_{ik} = 0, \quad w_l = \bar{w}_l = 0$
Konforme Flächentheorie (Zentralkugelsysteme) § 7	$a_{ik} = -\frac{1}{2} g_{ik}, \quad w_l = \bar{w}_l = 0, \quad c_i^i = 0$
Laguerresche Flächentheorie (Mittenkugelsysteme) § 7	$a_{ik} = 0, \quad w_l = \bar{w}_l = 0, \quad c_i^i = 0$
Nichteuklidische Flächentheorie (Punktkoordinaten) § 8	$c_{ik} = \bar{c}_{ik}$ $\quad a_{ik} = -\frac{1}{2} g_{ik}$ $n_l = 0$ $\quad w_l = \bar{w}_l = 0$
Euklidische (gewöhnliche bewegungsgeometrische) Flächentheorie (Punktkoordinaten) § 8	$c_{ik} = \bar{c}_{ik}$ $\quad a_{ik} = 0$ $n_l = 0$ $\quad w_l = \bar{w}_l = 0$
Nichteuklidische Flächentheorie (Ebenenkoordinaten) § 8	$c_{ik} = \bar{c}_{ik}$ $\quad a_{ik} = -\frac{1}{2} g_{ik}$ $n_l = 0$ $\quad w_l = \bar{w}_l = 0$
Euklidische Flächentheorie (Ebenenkoordinaten) § 8	$\bar{c}_{ik} = 0$ $\quad a_{ik} = -\frac{1}{2} g_{ik}$ $n_l = 0$ $\quad w_l = \bar{w}_l = 0$
Nichteuklidische Flächentheorie (Linienkoordinaten) § 4	$c_i^i = \bar{c}_i^i = 0, \quad \overline{m}_i = 0$ [23]
Affine Geometrie der Strahlensysteme § 9	$g^{rs} a_{ir} a_{ks} + w_i \bar{w}_k + w_k \bar{w}_i = 0$
Projektive Flächentheorie (Anhang)	$c_i^i = \bar{c}_i^i = 0$ dazu $m^i m_i = 0$ [23], statt dieser Bedingung kommen auch andere in Frage (vgl. Anhang)
Flächentheorie der höheren Kugelgeometrie (Anhang)	
Affine Flächentheorie (Anhang)	$g^{rs} a_{ir} a_{ks} + w_i \bar{w}_k + w_k \bar{w}_i = 0$ dazu noch eine weitere Bedingung (vgl. Anhang).

[23]) m_i und $\overline{m}_i$ sind in (63) erklärt.

§ 4.

Endgültige Formeln für die projektive Geometrie der Strahlensysteme.

Wir setzen $\sigma = \frac{1}{2} g^{ik} \mathfrak{p}_{ik}$. Dann kann man die Forderungen $c_i^i = h = 0$, $\bar{c}_i^i = \bar{h} = 0$ auch in der Form $(\mathfrak{v}\,\sigma) = (\bar{\mathfrak{v}}\,\sigma) = 0$ schreiben und durch diese Gleichungen sind dann $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ und $\mathfrak{z}$ festgelegt. Für $\mathfrak{z}$ erhält man den Ausdruck: $\mathfrak{z} = \sigma + \frac{1}{2}(\sigma\sigma)\,\mathfrak{p}$.

Die Normierung von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ legen wir fest durch die Forderungen:

(64) $$c = \bar{c} = -g.$$

Dabei schließen wir die Fälle $c = 0$ oder $d = 0$ aus, in denen der eine der Mäntel eine Torse ⟨Fläche mit lauter Nabelpunkten; im Reellen Kugel oder Ebene⟩ ist. Denn wegen $c = k = 0$, $h = 0$, $r = r' = \infty$ würden die Asymptoten (56a) des Mantels zusammenfallen.

Man erkennt leicht, daß man bei der Normierung (64) die normierten Werte $\hat{\mathfrak{p}}$, $\hat{\mathfrak{v}}$, $\hat{\bar{\mathfrak{v}}}$ durch die unnormierten auf folgende Weise erhält:[24])

(65) $$\hat{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cdot \sqrt[4]{\frac{c \cdot d}{g^2}}, \qquad \hat{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v} \cdot \sqrt[4]{\frac{d}{c}}, \qquad \hat{\bar{\mathfrak{v}}} = \bar{\mathfrak{v}} \cdot \sqrt[4]{\frac{c}{d}}.$$

Ebenso lassen sich die normierten Werte von g_{ik}, c_{ik}, $\bar{c}_{ik}$, a_{ik} usw. durch die unnormierten ausdrücken. Im folgenden werden alle diese Größen normiert angenommen, ohne daß dies besonders angedeutet wird. *Wegen* $h = \bar{h} = 0$, $k = \bar{k} = -1$ *ergeben sich jetzt die Asymptoten in der Form*:

(66) $$\mathfrak{p} \pm \mathfrak{v}, \quad \mathfrak{p} \pm \bar{\mathfrak{v}}.$$

Nach (10) berechnet man nun leicht, daß $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ die zu $\mathfrak{p}$ auf den Mänteln konjugierten Tangenten sind ⟨die berührenden Kugeln, die mit $\mathfrak{p}$ zu den Krümmungskugeln harmonisches Winkelverhältnis haben⟩. Ebenso ergibt sich aus (58) wegen $c_i^i = 0$ leicht, daß die Nullinien der Form c_{ik} das Paar konjugierter Richtungen auf dem ersten Mantel ergibt, das zu dem Paar der Nullinien von g_{ik} harmonisch liegt.

Die normierten Größen $\hat{\mathfrak{p}}$, $\hat{\mathfrak{v}}$, $\hat{\bar{\mathfrak{v}}}$, $\hat{g}_{ik}$, $\hat{c}_{ik}$, $\hat{\bar{c}}_{ik}$ hängen von Ableitungen bis zur zweiten, $\hat{\mathfrak{z}}$, $\hat{w}_i$, $\hat{\bar{w}}_i$, $\hat{n}_i$, $\hat{\mathfrak{p}}_i$ von Ableitungen bis zur dritten, $\hat{a}_{ik}$, $\hat{\mathfrak{p}}_{ik}$ von Ableitungen bis zur vierten Ordnung von $\mathfrak{p}$ ab.

In der festgelegten Normierung gelten zwischen den Tensoren g_{ik}, c_{ik}, p_{ik}, e_{ik} folgende für die Rechnungen sehr wichtigen „*Orthogonalitätsbedingungen*“:

(66) $$\frac{1}{2} g^{ik} g_{ik} = \frac{1}{2} c^{ik} c_{ik} = \frac{1}{2} p^{ik} p_{ik} = \frac{1}{2} e^{ik} e_{ik} = 1,$$

(67) $$g^{ik} c_{ik} = g^{ik} p_{ik} = c^{ik} p_{ik} = e^{ik} g_{ik} = e^{ik} c_{ik} = e^{ik} p_{ik} = 0.$$

[24]) Man ersieht leicht, welche Tripel von Wurzelwerten man nebeneinander in den drei Ausdrücken zu nehmen hat. Es bestehen verschiedene Möglichkeiten.

Ferner

$$c^{ir}c_{rk} = p^{ir}p_{rk} = e^{ir}e_{rk} = g^{ir}g_{rk} = g^i_k, \tag{68}$$

$$e_{ir}c^r_k = p_{ik}, \qquad e_{ri}p^r_k = c_{ik}, \qquad p_{ir}c^r_k = e_{ik}. \tag{69}$$

Analoge Gleichungen erhält man für den anderen Mantel.

Daraus leitet man ab:

$$(\mathfrak{v}_i\mathfrak{v}_k) = (\bar{\mathfrak{v}}_i\bar{\mathfrak{v}}_k) = g_{ik}. \tag{70}$$

Die Torsen der zu $\mathfrak{p}$ „*konjugierten Strahlensysteme*“ $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ schneiden auf dem entsprechenden Mantel also dasselbe konjugierte Netz aus, wie die Torsen von $\mathfrak{p}$.

Wegen $h = \bar{h} = 0$, $k = \bar{k} = -1$ erkennt man nach (42) leicht, daß ein Strahlensystem nur eine projektive Invariante von zweiter Ordnung hat, nämlich d.[25]) Sie hängt in einfacher Weise mit dem logarithmischen Doppelverhältnis φ der vier Fortschreitungsrichtungen der Asymptotenlinien auf den Mänteln zusammen: Es ist $\operatorname{ctg}\varphi = -d$.

Es gilt ferner die Gleichung: $f_{ik} = \frac{1}{2}d\cdot g_{ik}$. Die Hauptscharen fallen also für $d \neq 0$ mit den Torsen zusammen. Bei den W-Strahlensystemen ist jede Kurve der Mäntel Hauptkurve.

Wir wollen jetzt noch an (62) anknüpfend die *Differentialgleichung der Kurven von Darboux ⟨der zyklidischen Kurven⟩* weiter ausrechnen. Wegen $r = +1$, $r' = -1$, $(\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_{ikl}) = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}_{ikl}) = 0$ erhalten wir:

$$s_{ikl} = (\mathfrak{p}\,\mathfrak{v}_{ikl}) - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{p}_{ikl}).$$

Die Gleichungen (60), (61) nehmen unter Benutzung von (69) die einfachere Gestalt an

$$w_s = c^l_{sl} + c^l_s n_l, \tag{71}$$

$$\bar{w}_s = \bar{c}^l_{sl} - \bar{c}^l_s n_l. \tag{72}$$

Man weist dann mit Hilfe von (71) leicht die Identität nach

$$c_{ikl} = p_{ik}p^r_l c^l_{rs}. \tag{73}$$

Mit Hilfe dieser Beziehung und unter Verwendung der Abkürzung (63) erhält man:

$$s_{ikl} = m_l g_{ik} + c^s_l m_s c_{ik} \tag{74}$$

analog für den andern Mantel:

$$\bar{s}_{ikl} = \bar{m}_l g_{ik} + \bar{c}^s_l \bar{m}_s \bar{c}_{ik}. \tag{75}$$

---

[25]) Invariante von Waelsch, Wiener Ber. **100** (1891), S. 158.

Es gibt sechs unabhängige projektive Invarianten eines Strahlensystems, ie von dritten Ableitungen abhängen. Führen wir die Abkürzungen ein:

76). $$\begin{cases} J = m^i m_i, & S = p^{ik} m_i m_k, & T = c^{ik} m_i m_\kappa, \\ \bar{J} = \bar{m}^i \bar{m}_i, & \bar{S} = \bar{p}^{ik} \bar{m}_i \bar{m}_k, & \bar{T} = \bar{c}^{ik} \bar{m}_i \bar{m}_\kappa, \end{cases}$$

gilt:

$$J^2 = S^2 + T^2, \qquad \bar{J}^2 = \bar{S}^2 + \bar{T}^2. \quad ^{26})$$

etzen wir ferner:

77) $$A = c^{ik} n_i n_k, \qquad B = \bar{c}^{ik} n_i n_k,$$

können wir etwa S, T, $\bar{S}$, $\bar{T}$, A und B als die Repräsentanten der echs Invarianten ansehen.

Es gilt $J = \frac{1}{2} S^{ikl} S_{ikl}$.

$J = 0$ resp. $\bar{J} = 0$ ist die Bedingung dafür, daß der eine Mantel eine egelfläche ⟨*Kanalfläche*⟩, $m_i = 0$ ($\bar{m}_i = 0$) die Bedingung dafür, daß der ne Mantel eine *Fläche zweiter Ordnung* ⟨*Dupinsche Zyklide*⟩ ist. Das tudium dieser letzteren Strahlensysteme ist identisch mit der *nichteuklischen Flächentheorie* des nicht in eine F_2 ausgearteten Mantels. Ist wa $\bar{m}_i = 0$, so sind die Strahlen $\mathfrak{p}$ die *isotropen Flächentangenten der nen Schar* (Tangenten an die absolute Fläche) des ersten Mantels. Die ullinien von g_{ik} sind die Minimallinien dieser Schar und die zu ihnen onjugierten Kurven.

Aus den Koeffizienten der Formen c_{ik}, $\bar{c}_{ik}$ lassen sich diejenigen der orm g_{ik} nach $c_i^i = 0$, $\bar{c}_i^i = 0$, $-g = c = \bar{c}$ berechnen[26a]). Das in der tzten quadratischen Gleichung steckende doppelte Vorzeichen kann durch ezielle Wahl der Normierung festgelegt werden. Nach den auf Formel (61) lgenden Ausführungen ist dann der Nachweis des Satzes nicht mehr schwer:

Ein Strahlensystem mit getrennten Brennmänteln, das kein W-Strahlensystem ist, wird durch die beiden quadratischen Formen c_{ik} und $\bar{c}_{ik}$ und ie Linearform n_i bis auf projektive Transformationen bestimmt. ⟨Entrechendes gilt für die Liesche Geometrie der Kugelsysteme.⟩

Mit einer Fläche ist eine *Lie-F_2* ⟨*Lie-Zyklide*⟩ projektivinvariant rbunden. Zieht man längs einer Asymptotenlinie drei konsekutive Asymoten der anderen Schar, so ist die Lie-F_2 die durch diese drei Geraden legte F_2. Führt man die asymptotischen Parameter des einen Mantels seres Strahlensystems ein, so ist die eine Schar der Erzeugenden σ seiner ie-F_2 gegeben durch

$$(\sigma\,\sigma) = 0; \qquad (\sigma, \mathfrak{p} + \mathfrak{v}) = 0; \qquad (\sigma, \mathfrak{p}_v + \mathfrak{v}_v); \qquad (\sigma, \mathfrak{p}_{vv} + \mathfrak{v}_{vv}) = 0.$$

[26]) Beweis durch Einführung spezieller Parameter!

[26a]) Ist die Normierungsbedingung $-g = c = \bar{c}$ nicht zu brauchen, so kann man dere statt ihrer zur Berechnung von g_{ik} benutzen.

Daraus läßt sich für die Lie-F_2 eine Darstellung in allgemeinen Parametern finden.

§ 5.

Über konforme und Laguerresche Flächentheorie.

Wir knüpfen unmittelbar an die Ausführungen des vorigen Paragraphen an und bedienen uns jetzt der Ausdrucksweise der Lieschen Kugelgeometrie. Wir betrachten die speziellen Kugelsysteme, für die

$$\varepsilon c_{ik} = \bar{c}_{ik}, \quad \varepsilon w_l = \bar{w}_l, \quad n_l = 0 \tag{78}$$

ist. Hier bedeutet ε eine Konstante. Wegen (42) ist dann $d = 0$. Wir haben es also mit W-Kugelsystemen zu tun. Aus (31) und (32) folgt dann $\varepsilon \mathfrak{v}_l - \bar{\mathfrak{v}}_l = 0$, $\varepsilon \mathfrak{v} - \bar{\mathfrak{v}} =$ konst. Führen wir die Bezeichnung $\mathfrak{q} = \varepsilon \mathfrak{v} - \bar{\mathfrak{v}}$ ein, so ist $(\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}) = 0$. Die Kugeln $\mathfrak{p}$ gehören also dem konstanten linearen Komplex $\mathfrak{q}$ an. $\mathfrak{q}$ kann auch in eine Kugel ausarten, nämlich für $(\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}) = -2\varepsilon = 0$; dann berühren alle Kugeln $\mathfrak{p}$ die feste Kugel $\mathfrak{q}$. In der Einleitung ist ausgeführt, daß man für $\varepsilon \neq 0$ zur konformen Flächentheorie gelangt. Wenden wir uns zunächst diesem Fall zu! Die dem Komplex angehörenden Kugeln $\mathfrak{p}$ sind die Flächenpunkte. Führen wir ein solches Normalkoordinatensystem [vgl. § 1, (1b)] ein, daß $\mathfrak{q}$ die Koordinaten $(0, 0, 0, 0, 0, \sqrt{2\varepsilon})$ bekommt, so wird $\mathfrak{p}_6 = 0$. Die ersten fünf Koordinaten von $\mathfrak{p}$ sind dann seine *fünf pentasphärischen Punktkoordinaten*. Führen wir die Bezeichnung ein:

$$[\zeta\eta] = \zeta^1\eta^1 + \zeta^2\eta^2 + \zeta^3\eta^3 + \zeta^4\eta^4 - \zeta^5\eta^5, \tag{79}$$

so ist $[\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}] = 0$. Für die Koordinaten einer Kugel $\mathfrak{r}$, die dem Komplex $\mathfrak{q}$ nicht angehört $\{(\mathfrak{r}\,\mathfrak{q}) \neq 0,\ (r\,r) = 0\}$, gilt $[r\,r] \neq 0$. Die ersten fünf Koordinaten von r sind jetzt die *pentasphärischen Kugelkoordinaten*. Dabei entsprechen immer einer Kugel mit gegebenen pentasphärischen Koordinaten $r_1, r_2, \ldots, r_5$ zwei Kugeln in der höheren Kugelgeometrie, die mit den sechsten Koordinaten $r_6 = +\sqrt{[\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}]}$ und $r_6 = -\sqrt{[\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}]}$.

Ein solches Kugelpaar wird in der konformen Geometrie einfach als Kugel bezeichnet. (Der Unterschied verschieden „orientierter" Kugeln fällt weg.) An Stelle eines linearen Komplexes σ $((\sigma\,\sigma) \neq 0)$ bekommen wir in der konformen Geometrie eine Kugel mit den pentasphärischen Koordinaten $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_5$. Die beiden Kugeln mit den sechsten Koordinaten $\sigma_6 = \pm\sqrt{[\sigma\,\sigma]}$ sind die in dem Büschel linearer Komplexe $\alpha\sigma + \beta\mathfrak{q}$ (α, β skalar) enthaltenen Kugeln. Ihnen entspricht also $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_5)$.

Dadurch, daß wir Kugeln, die sich nur durch das Vorzeichen von σ_6 unterscheiden, untereinander identifizieren, fallen auch die beiden Mäntel der Enveloppe unserer speziellen Kugelsysteme zusammen[27]). Es stimmen

[27]) Dieses „Zusammenfallen" der Mäntel hat natürlich nicht $g = 0$ zur Folge. § 3.

$\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ in den ersten fünf Koordinaten überein. $(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}) = 0$ ergibt: $_6 = \pm\sqrt{[\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}]}$ und wegen $[\bar{\mathfrak{v}}\,\bar{\mathfrak{v}}] = [\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}]$ erhalten wir $\bar{\mathfrak{v}}_6 = \mp\sqrt{[\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}]}$. Also erden $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ in der konformen Geometrie miteinander identifiziert und amit auch die Mäntel. Wir schreiben in der konformen Flächentheorie ie Formeln nur in fünf Koordinaten aus und können dann $\mathfrak{v} = \bar{\mathfrak{v}}$ setzen.

In einem Büschel von Kugeln sind immer zwei Nullkugeln (Punkte) entalten. *Der Winkel zweier Kugeln ist das logarithmische Winkelverhältnis, n dem die Nullkugeln des durch sie gebildeten Büschels zu ihnen liegen.*

Für die konforme Flächentheorie behalten wir die in § 3 zur Festgung von $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ und $\mathfrak{z}$, sowie zur Bestimmung der Normierung verwandten leichungen bei.

Die Form g_{ik} geht in die der Minimallinien über. *Der Winkel zweier on einem Flächenpunkt ausgehenden Richtungen ist das logarithmische Winkelverhältnis, in dem diese Richtungen zu den beiden isotropen Flächenichtungen liegen.* Aus (58) ergibt sich für den Winkel φ der Nullinien er Form $r_{ik}\,du^i\,du^k$:

$$\text{ctg}\,\varphi = \frac{i}{2}\,\frac{r_i^i\sqrt{g}}{\sqrt{r}} \qquad (r = |r_{ik}|). \tag{30}$$

Die Kugel $\eta = \mathfrak{v} + \varepsilon\bar{\mathfrak{v}}$ ist die Zentralkugel der Fläche, die die Fläche erührt und zusammen mit der Nullkugel des Flächenpunkts mit den Krümmungskugeln ein harmonisches Winkelverhältnis bildet. Sie ist in em Büschel dieser Kugeln dadurch gekennzeichnt, daß sie die Fläche in ner Kurve mit zwei senkrechten Tangenten im Berührungspunkt durchchneidet. Die Richtungen dieser ausgezeichneten Tangenten sind die Richngen der Nullinien der Form $(\eta\,\mathfrak{p}_{ik}) = (1 + \varepsilon^2)\,c_{ik}$, der Winkelhalbierenden er Krümmungslinien, die wir die *Schnittangentenkurven* der Fläche nennen ollen[27a]). Nach (31), (32) ist:

$$(\eta_i\,\eta_k) = g_{ik}\cdot[1 + \varepsilon^2]^2. \tag{31}$$

s fallen also die Berührscharen des Systems der mit der Fläche verndenen Zentralkugeln mit den Minimallinien zusammen. Von den ntegrabilitätsbedingungen bleiben vier wesentliche übrig, nämlich: (35), 36), (38), (40).

An weiteren in der konformen Flächentheorie wichtigen Begriffen seien dieser Stelle erwähnt:

1. Die zu einem Linienelement $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p} + d\mathfrak{p}$ gehörige *Querkugel* $d\hat{\mathfrak{p}}$[28]). as Dach soll andeuten, daß das Differential des normierten $\mathfrak{p}$ zu nehmen

[27a]) Vgl. hierzu und zu dem folgenden die ausführlichen Angaben in der unter [4]) ierten Arbeit.

[28]) Die in der unter [4]) zitierten Arbeit angegebene Deutung der Querkugel ist cht richtig.

ist.) Geometrisch gelangen wir auf folgende Weise zu ihr: Die beiden benachbarten Krümmungskugeln von einer der beiden Scharen in $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} + d\mathfrak{p}$ schneiden sich in einem Kreis. Durch diesen Kreis legen wir die zu der Krümmungskugel in $\mathfrak{p}$ senkrechte Kugel. Diese Kugel schneidet sich mit der aus den Krümmungskugeln der andern Schar konstruierten entsprechenden in einem auf der Fläche in $\mathfrak{p}$ senkrecht stehenden Kreis, dem *Querkreis* des Linienelements. Die Querkugel ist nun diejenige durch $\mathfrak{p}$ hindurchgehende und auf dem Linienelement senkrecht stehende Kugel, die den Querkreis enthält.

2. Der *Normalkreis* einer Fläche, der auf dieser im Flächenpunkt senkrecht steht und der Schnittkreis aller Querkugeln in ihm ist.

3. Der *Hauptpunkt* $\mathfrak{z}$ in dem der Normalkreis die Zentralkugel zum zweiten Mal durchstößt.

4. *Die konformgeodätischen Linien.* Wie die gewöhnlichen geodätischen Linien dadurch gekennzeichnet werden können, daß ihr Krümmungskreis die Flächennormale außer im Flächenpunkt noch ein zweites Mal schneidet, so ist es für die konformgeodätischen Linien charakteristisch, daß ihr Krümmungskreis den Normalkreis zweimal schneidet. Diese Kurven sind die Extremalen des Variationsproblems $\delta \int \sqrt{g_{ik} du^i du^k} = 0$, wo g_{ik} die nach § 4 normierte Form ist.

Hat man nur die konforme Flächentheorie im Auge, so wird man $\varepsilon = 1$ setzen; läßt man aber ε zunächst willkürlich, so kann man aus den Formeln der konformen, den Ausführungen in der Einleitung entsprechend, die der Laguerreschen Flächentheorie als Spezialfall gewinnen, indem man $\varepsilon = 0$ setzt. Dann ist $\mathfrak{q} = -\bar{\mathfrak{v}} = \text{konst.}$ eine Kugel der Lieschen Geometrie. Die diese feste Kugel berührenden Kugeln sind die *„orientierten" Ebenen* der Laguerreschen Geometrie. Durch $\mathfrak{p}(u^1, u^2)$ ist also ein Ebenensystem gegeben und wir haben die Flächentheorie des nichtausgearteten Mantels in Ebenenkoordinaten. Bei Einführung geeigneter Normalkoordinaten bekommen wir für $\mathfrak{q}$ die Koordinatenwerte $(0, 0, 0, 1, 0, 1)$, es wird $\mathfrak{p}_4 = \mathfrak{p}_6$. Wegen $(\mathfrak{p}\mathfrak{p}) = 0$ ist $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5$ nach Festlegung eines solchen ausgezeichneten Koordinatensystems bestimmt. Diese vier Größen sind dann die von Blaschke verwandten homogenen *Laguerreschen Ebenenkoordinaten.* Normieren wir die Kugeln r, die $\mathfrak{q}$ nicht berühren, durch $(r\mathfrak{q}) = \text{konst.}$, so können wir r_1, r_2, r_3, r_5 als inhomogene *Laguerresche Kugelkoordinaten* einführen.

Wir können bei Festlegung auf diese Koordinatensysteme die vierten und sechsten Koordinaten in den Formeln weglassen und $\mathfrak{q} = -\bar{\mathfrak{v}} = 0$ setzen. Da $\bar{c} = 0$ ist, so ist nur die eine Normierungsbedingung $c = -g$ zulässig. Diese Bedingung genügt dann aber, um alle Größen bis auf den

n, $\bar{\mathfrak{v}}$ steckenden willkürlichen konstanten Faktor festzulegen. Diese Unbestimmtheit entspricht ähnlichen Verhältnissen in der Bewegungsgeometrie, wo auch die wichtigsten Größen nur bis auf einen konstanten Faktor invariant sind, der von der Wahl der Maßeinheit abhängt. Die Hauptbegriffe der konformen Flächentheorie gehen für $\varepsilon = 0$ in die entsprechenden der Laguerreschen über. Die Zentralkugel wird z. B. zu der *Mittenkugel* von Blaschke.

Die so erhaltenen Formeln der Laguerreschen Flächentheorie sind jedoch nicht ohne weiteres mit denen von Blaschke identisch. Wir werden später noch einmal von anderer Seite auf konforme und Laguerresche Flächentheorie zurückkommen und dann die Blaschkeschen Formeln erhalten.

§ 6.

Über konforme und Laguerresche Geometrie der Kugelsysteme.

In § 4 übernahmen wir für die konforme Flächentheorie die Gleichungen zur Festlegung von $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ und $\mathfrak{z}$ und die Gleichungen zur Bestimmung der Normierung unmittelbar aus § 4. Hier werden wir im Gegensatz dazu an die allgemeinen Formeln des § 3 anknüpfen. $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ und $\mathfrak{z}$ sind dann also zunächst noch unbestimmt. Es ist oben ausgeführt worden, daß $\mathfrak{z}$ den Gleichungen

$$(\mathfrak{z}\mathfrak{z}) = 0, \qquad (\mathfrak{z}\mathfrak{p}) = -1, \qquad (\mathfrak{z}\mathfrak{p}_i) = 0 \tag{82}$$

genügend, in gewissem Ausmaß noch frei gewählt werden kann. Durch Festlegung von $\mathfrak{z}$ war dann auch $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ (bis auf die Normierung) bestimmt.

Wir fordern nun: Es soll der Komplex $\mathfrak{z} + \frac{1}{2}\delta\mathfrak{p}$, wo δ eine vorgegebene Konstante ist, dauernd gleich einem vorgegebenen festen Komplex ζ sein. (Setzen wir

$$\mathfrak{z} + \frac{1}{2}\delta\mathfrak{p} = \zeta, \tag{83}$$

so muß ζ natürlich so normiert sein, daß $(\zeta\zeta) = -\delta$ ist.) Diese Forderung ist erfüllbar, denn die Gleichungen (82) sind mit dieser Forderung vereinbar. Wir normieren $\mathfrak{p}$ durch $(\mathfrak{p}\zeta) = -1$. Dann ist $(\mathfrak{p}_i\zeta) = 0$. Für diese ausgezeichnete Normierung folgen dann aber aus (83) die Gleichungen (82).

Aus (83) folgt $\mathfrak{z}_i = -\frac{1}{2}\delta \cdot \mathfrak{p}_i$, oder nach (33)

$$a_{ik} = -\frac{1}{2}\delta \cdot g_{ik}, \qquad w_l = \bar{w}_l = 0. \tag{84}$$

Statt (83) hätten wir auch (84) fordern können, um $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ festzulegen.

Ist $\delta \neq 0$, so ist ζ ein „eigentlicher" Komplex, und da wir einen Komplex adjungiert haben, treiben wir konforme Geometrie. Wegen $(\mathfrak{p}\zeta) \neq 0$ sind die $\mathfrak{p}$ eigentliche (nicht in Punkte ausgeartete) Kugeln im Sinne der Konformgeometrie[29]). Wir werden also durch die Gleichungen (84) zur konformen Geometrie der Kugelsysteme geführt. Ebenso gelangt man für den Fall $\delta = 0$, indem man mit ζ eine Kugel adjungiert, zur Laguerreschen Geometrie der Kugelsysteme.

Setzen wir für den Fall $\delta \neq 0$ der konformen Geometrie wieder $\zeta = (0, 0, 0, 0, 0, \sqrt{\delta})$, so können wir die sechsten Koordinaten weglassen, $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_5$ sind die pentasphärischen Kugelkoordinaten und es ist dann $\zeta \equiv 0$ zu setzen, also $\mathfrak{z} \equiv -\frac{1}{2}\delta\mathfrak{p}$.

Wegen $(\mathfrak{v}\zeta) = (\bar{\mathfrak{v}}\zeta) = 0$ sind $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ Punkte und zwar nach (19) die *Enveloppenpunkte des Kugelsystems*. Die Normierung der Kugeln $\mathfrak{p}$ ist durch $(\mathfrak{p}\zeta) = -1$ festgelegt[29a]). Die Normierung von $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ werden wir im allgemeinen Fall am besten durch die Forderung

$$c = \bar{c} \tag{85}$$

festlegen.

Jedoch ist es in speziellen Fällen oft zweckmäßiger, andere Normierungen zu benutzen.

Durch $c_{ik}du^i du^k = (\mathfrak{p}d^2\mathfrak{v}) = 0$ sind wegen $(\mathfrak{p}\mathfrak{v}) = (\mathfrak{p}d\mathfrak{v}) = 0$ die Tangentenrichtungen an die Schnittkurve des ersten Mantels mit der Kugel $\mathfrak{p}$ des Systems gegeben. Die Nullinien von c_{ik} und der entsprechenden Form $\bar{c}_{ik}$ wollen wir als die *Schnittangentenkurven des Kugelsystems* auf den Mänteln bezeichnen.

Im Anschluß an die Überlegungen des § 3 [Formel (56b)ff] können wir über die Nullinien der Form f_{ik} jetzt die folgende Aussage machen: Es muß außer der Kugel $\mathfrak{p}$ noch eine Nachbarkugel $\mathfrak{p} + \delta\mathfrak{p}$ durch die Enveloppenpunkte $\mathfrak{v}, \bar{\mathfrak{v}}$ und die ihnen in Richtung einer der Hauptscharen benachbarten $\mathfrak{v} + d\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}} + d\bar{\mathfrak{v}}$ hindurchgehen. Die Kugeln $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} + \delta\mathfrak{p}$ schneiden sich aber in einem Kreis. Also müssen die vier Punkte auf einem Kreise liegen und wir werden so auf die bekannte Darbouxsche Definition der *Hauptkurven einer Kugelkongruenz* geführt.

Mit Hilfe von § 3 (42) und der aus (85) folgenden Beziehung $k = \bar{k}$ ersieht man leicht, daß es vier konforme Differentialinvarianten einer Kugelkongruenz gibt, die von Ableitungen bis zur zweiten Ordnung abhängen. Mit Hilfe von § 3 (58), § 5 (80) sind geometrische Deutungen von vier Repräsentanten derselben einfach.

---

[29]) Sie gehören dem festen Komplex nicht an.

[29a]) Denn durch $(\zeta\zeta) = -\delta$ bei vorgegebenem δ ist die Normierung von ζ eindeutig festgelegt.

Die Minimallinien der Mäntel sind die Nullinien der Formen:

36) $$g^{rs} c_{ir} c_{ks} \quad \text{und} \quad g^{rs} \bar{c}_{ir} \bar{c}_{ks}.$$

urch

37) $$\sigma(t) = \frac{1}{2} t^2 \mathfrak{v} + \frac{t}{\sqrt{\delta}} \mathfrak{p} + \bar{\mathfrak{v}},$$

o der Punkt σ — (wegen $[\mathfrak{p}\mathfrak{p}] = \delta$[29b]) ist $[\sigma\sigma] = 0$) — als Funktion nes Parameters t gegeben ist, wird der *Kongruenzkreis* des Systems argestellt, der auf beiden Mänteln in den Enveloppenpunkten $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ enkrecht steht.

Die Theorie der W-Kugelsysteme ($d = 0$ vgl. (50)), auf deren Mänteln ich die Krümmungslinien entsprechen, ermöglicht in Verbindung mit der etrachtung des Systems $\sigma(u^1, u^2, t)$ der Kongruenzkreise eine einfache lerleitung der *Ribeaucourschen Theorie der normalen Kreissysteme.* st $\mathfrak{p}(u^1, u^2)$ ein auf die sich entsprechenden Krümmungslinien der Mäntel ezogenes Kugelsystem mit $d = 0$ und sind $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ die zugehörigen nveloppenpunkte, so ist durch $\sigma(u^1, u^2, t)$ in (87) ein *dreifaches Orthoonalsystem* von Flächen $u^1 =$ konst., $u^2 =$ konst., $t =$ konst. gegeben.

Kugelsysteme, deren Mäntel winkeltreu aufeinander bezogen sind, sind pezielle W-Kugelsysteme.

Für $\delta = 0$ gelangt man zu analogen Betrachtungen der Laguerreschen eometrie der Kugelsysteme. $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ sind dann die *Tangentialebenen* er Mäntel. Die Normierung von $\mathfrak{p}$ ist in diesem Falle durch $(\mathfrak{p}\zeta) = -1$ ur bis auf einen konstanten Faktor festgelegt, da ζ nicht normiert ist.

§ 7.

Zentral- und Mittenkugelsysteme.

Nochmals konforme und Laguerresche Flächentheorie.

In der konformen [Laguerreschen] Geometrie der Kugelsysteme ührt das einfachste invariante Variationsproblem $\delta \iint \sqrt{g}\, du\, dv = 0$ auf ie Differentialgleichungen $c_i^i = 0$ und $\bar{c}_i^i = 0$ für die Extremalen.

Nun ist $c_i^i = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, aß ein Kugelsystem für den einen (ersten) Mantel aus den Zentralkugeln Mittenkugeln][29c]) desselben besteht.

Das Winkelverhältnis D nämlich zwischen den beiden Krümmungskugeln $\mathfrak{p} + r\mathfrak{v})$ und $(\mathfrak{p} + r'\mathfrak{v})$ einerseits und der Nullkugel [Tangentialebene] $\mathfrak{v}$

[29b]) Die Bedeutung der eckigen Klammer ist wieder aus (79) zu entnehmen.

[29c]) Die Ausdrücke in den eckigen Klammern gelten für die Laguerresche Geometrie.

des Enveloppenpunkts und der Kugel $\mathfrak{p}$ des Systems andererseits berechnet sich zu $\frac{r'}{r}$. Die Bedingung für harmonisches Winkelverhältnis ist

$$D = \frac{r'}{r} = -1 \quad \text{oder} \quad r + r' = 0 \quad \text{oder} \quad h = \frac{1}{2} c_i^i = 0,$$

womit der Beweis geführt ist.

Es ist nun eine sehr fruchtbare Methode, die konformen [Laguerre-geometrischen] Eigenschaften der Flächen in den Eigenschaften ihres Zentral-[Mitten-]kugelsystems zu studieren. Man ersieht aus (44), daß für $c_i^i = 0$ die Tensoren $g^{rs} c_{ir} c_{ks}$ und g_{ik} der Minimallinien des ersten Mantels und der Berührscharen proportional sind. Statt (85) wählen wir nun die Normierung so, daß $g^{rs} c_{ir} c_{ks} = g_{ik}$ ist. Dann ist nach (44) $k = -1$, und daraus ersieht man leicht, daß der Flächenpunkt $\mathfrak{v}$, abgesehen von einem unwesentlichen konstanten Faktor, in ganz derselben Weise normiert ist, wie dies im § 5 in der konformen [Laguerreschen] Flächentheorie „aus der Fläche heraus" geschah. Danach ist es nicht mehr schwer, den Zusammenhang mit den Formeln des § 5 herzustellen. Für die Laguerresche Geometrie werden wir jetzt direkt auf die Formeln von Blaschke geführt. Die Schnittangentenkurven c_{ik} des Kugelsystems gehen jetzt über in die Schnittangentenkurven der Fläche im Sinne von § 5.

Die Extremalen des obigen Variationsproblems liefern die Kugelsysteme, die für beide Mäntel die Systeme der Zentral-[Mitten-]kugeln sind. Die Mäntel solcher Systeme sind natürlich ganz besondere Flächen. Sie sind auch die Extremalen der einfachsten invarianten Variationsprobleme für Flächen. Für die konforme Geometrie sind es die *Konformminimalflächen*, für die Laguerresche die *„L-Minimalflächen"*. Die letztere interessante Flächenklasse ist nach Blaschke vollständig integrallos darstellbar.

Die Kugelsysteme mit $c_i^i = 0$, $d = 0$ liefern in der konformen Geometrie für die Flächen des ausgezeichneten Mantels die *Isothermflächen*, für die Laguerresche Geometrie die *Flächen, bei denen die sphärischen Bilder der Krümmungslinien auf der Kugel ein Isothermensystem bilden*[30]

§ 8.

Nichteuklidische und euklidische Flächentheorie in Punkt- und Ebenenkoordinaten.

Wir knüpfen an die Untersuchungen des vorigen Paragraphen unmittelbar an und setzen außer (84) noch

(88) $$c_{ik} = \bar{c}_{ik}, \qquad n_l = 0.$$

[30]) Siehe die unter [5]) zitierte Arbeit von W. Blaschke.

Dann erhalten wir analog § 4: $\varepsilon \mathfrak{v} - \bar{\mathfrak{v}} = \mathfrak{q} =$ konst. Wir betrachten also wieder die einem linearen Komplex angehörenden Kugelsysteme, dieses Mal vom Standpunkte der konformen Geometrie aus, statt von dem der Lieschen.

Wir können unsern Gleichungen noch eine andere Deutung geben. Wir gelangen durch die Bedingungen $c_{ik} = \bar{c}_{ik}$, $w_l = \bar{w}_l$, $n_l = 0$ nach § 4 zur konformen Flächentheorie. Durch $a_{ik} = -\frac{1}{2}\delta \cdot g_{ik}$, $w_l = \bar{w}_l = 0$ wird dann in derselben Weise wie in § 5 die Konstanz von $\mathfrak{z} + \frac{1}{2}\delta \mathfrak{p}$ gefordert und damit erstens ein linearer Komplex adjungiert, zweitens die Festlegung von $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ und $\mathfrak{z}$ vollzogen. Diesen linearen Komplex können wir aber nach § 4 in der konformen Geometrie eine Kugel entsprechen lassen, die für $\delta = 0$ in einen Punkt ausartet, denn für $\delta = 0$ ist in der Liechen Geometrie $\zeta = \mathfrak{z}$ eine Kugel; wenn wir dann durch Adjunktion des Komplexes $\mathfrak{q} = \mathfrak{v} = \bar{\mathfrak{v}}$ zur konformen Geometrie aufsteigen, so ist $(\zeta \mathfrak{q}) = 0$, $\mathfrak{p}$ gehört diesem Komplex also an und wird ein Punkt. Durch Adjunktion einer Kugel gelangt man aber von der konformen zur nichteuklidischen Geometrie, durch Adjunktion eines Punktes zur euklidischen. Also werden wir durch unsere Bedingungen (84), (88) im Falle $\delta \neq 0$ zur nichteuklidischen, im Falle $\delta = 0$ zur euklidischen Flächentheorie geführt.

Wir setzen zunächst wieder $\mathfrak{q} = \mathfrak{v} - \bar{\mathfrak{v}} = (0, 0, 0, 0, 0, \sqrt{2})$. Dann sind die fünf ersten Koordinaten pentasphärische. Dann führen wir im Fall $\delta \neq 0$ solche pentasphärische Koordinaten ein, daß $\zeta = (0, 0, 0, 0, \sqrt{\delta})$ wird[31]). Es wird dann für den Flächenpunkt $\mathfrak{p}$ wegen

$$[\mathfrak{p}\mathfrak{p}] = 0, \quad [\mathfrak{p}\zeta] = -1, \quad \mathfrak{p}_5 = \frac{1}{\sqrt{\delta}}:$$

$$\mathfrak{p}_1^2 + \mathfrak{p}_2^2 + \mathfrak{p}_3^2 + \mathfrak{p}_4^2 = \frac{1}{\delta}.$$

Setzt man $\delta = 1$, so sind $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_4$ die *Weierstraßschen Koordinaten* des Flächenpunkts[32]). $\xi = \mathfrak{v} + \bar{\mathfrak{v}}$ ist die *Tangentialebene*.

Für $\delta = 0$ kann man den pentasphärischen Koordinaten des Punktes $\zeta = \mathfrak{z}$ die Werte geben: $(0, 0, 0, 1, 1)$. Durch $(\mathfrak{p}\zeta) = -1$ ist die Normierung von $\mathfrak{p}$ entsprechend der Willkürlichkeit der Maßeinheit nur bis auf den in ζ steckenden konstanten Faktor festgelegt. $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ sind die *kartesischen Koordinaten* des Flächenpunktes. $\xi = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\mathfrak{v} + \bar{\mathfrak{v}})$ ist die *Tangentialebene*; ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind die *Richtungskosinus der Flächennormalen*. $C_{ik} = \sqrt{2} \cdot c_{ik}$ ist die Form der *Asymptotenlinien* $\langle (\xi\, d^2\mathfrak{p}) = C_{ik}\, du^i du^k \rangle$,

[31]) Wegen $(\zeta\zeta) = -\delta$, $(\zeta\mathfrak{q}) = 0$ ist $[\zeta\zeta] = -\delta$.

[32]) Zunächst wenigstens für den elliptischen Fall.

$\sqrt{2}\cdot h$ und $2k$ sind *mittlere* und *Gaußsche Krümmung*. Bei Weglassung der drei letzten Gleichungen wird aus (30), (31)

$$\mathfrak{p}_{ik} = + C_{ik}\xi \quad (\textit{Gaußsche Gleichungen}),$$
$$\xi_l = - C_l^s \mathfrak{p}_s \quad (\textit{Weingartensche „ }).$$

Es bleiben zwei Integrabilitätsbedingungen übrig: (35) und (38)

$$K = 2k \quad (\textit{Gauß. Theorema egregium}),$$
$$e^{kl} c_{ikl} = 0 \quad (\textit{Codazzische Gleichungen}).$$

Noch von einer anderen Seite her können wir zur nichteuklidischen und euklidischen Flächentheorie gelangen.

Betrachten wir die Kugelsysteme, deren Kugeln alle zu einer festen Kugel orthogonal sind, so treiben wir in dem Studium einer der Mäntel nichteuklidische Flächentheorie. Durch die Betrachtung der Kugelsysteme, deren Kugeln alle durch einen festen Punkt gehen, gelangen wir in ähnlicher Weise zur euklidischen Flächentheorie. Da die Kugeln des Systems zu der festen Kugel orthogonal sind, resp. durch den festen Punkt hindurchgehen, sind sie Ebenen der nichteuklidischen, resp. euklidischen Geometrie, und zwar sind sie die Tangentialebenen des zu betrachtenden Mantels.

Die Formeln sind also in *Ebenenkoordinaten* geschrieben. Die Schnittangentenkurven des Systems gehen über in die Asymptotenlinien des Mantels. Die Form g_{ik} ist die *Form des Linienelements auf der Einheitskugel im sphärischen Bilde.*

Im Zusammenhang mit der Theorie der Zentralkugelkongruenzen lassen sich nun Sätze ableiten, die Beziehungen zwischen der konformen, nichteuklidischen und euklidischen Geometrie darstellen, wie etwa die folgenden:

Die Konformminimalflächen, die gleichzeitig Isothermflächen sind, sind die Minimalflächen der nichteuklidischen und euklidischen Geometrie und die Konformverwandten.

Gehen die Kongruenzkreise einer Zentralkugelkongruenz alle durch einen festen Punkt, so ist der ausgezeichnete Mantel eine Fläche fester (euklidischer) mittlerer Krümmung oder eine Konformverwandte.

§ 9.

Affine Geometrie der Strahlensysteme.

Wir benutzen jetzt die Ausdrucksweise der projektiven Geometrie der Strahlensysteme. Wir fordern:

(89) $$g^{rs} a_{ir} a_{ks} + w_i \overline{w}_k + w_k \overline{w}_i = 0.$$

us (33) berechnet man, daß der links stehende Ausdruck gleich $(\mathfrak{z}_{\partial i}\mathfrak{z}_{\partial k})$ t. Nun ist $(\mathfrak{z}_i\mathfrak{z}_k)=0$ aber die notwendige und hinreichende Bedingung afür, daß alle Strahlen des Systems $\mathfrak{z}(u^1, u^2)$ in einer festen Ebene egen. Wählen wir solche Parameter, daß $(\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_1)=(\mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_2)=0$ wird, so üssen die Strahlen $\mathfrak{z}+\mathfrak{z}_1 du^1$ und $\mathfrak{z}+\mathfrak{z}_2 du^2$ sich schneiden und das efert $(\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2)=0$. Deshalb ist die Bedingung notwendig; aber sie ist uch hinreichend, weil alle weiteren skalaren Produkte $(\mathfrak{z}\mathfrak{z}_{ik})$, $(\mathfrak{z}\mathfrak{z}_{ikl})$ usw. erschwinden. Indem wir die durch die Strahlen $\mathfrak{z}$ gebildete Ebene adngieren, können wir der Forderung (89) jetzt die folgende Wendung eben: $\mathfrak{z}$ soll dauernd in einer vorgegebenen festen Ebene liegen.

Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ $\langle(\mathfrak{a}\mathfrak{a})=(\mathfrak{b}\mathfrak{b})=(\mathfrak{c}\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}\mathfrak{b})=(\mathfrak{b}\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}\mathfrak{c})=0\rangle$ drei in ner festen Ebene gelegene Strahlen in allgemeiner Lage, so läßt sich en Systemstrahlen $\mathfrak{p}$ durch die Forderung $e^{rs}|\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_r, \mathfrak{p}_s, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}|=1$ beiglich dieser Ebene eine bis auf einen konstanten Faktor bestimmte usgezeichnete Normierung geben. Ersetzt man nämlich die Strahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ urch andere in der Ebene gelegene, so sind diese lineare Kombinationen on ihnen, die Normierung ändert sich nur um einen konstanten Faktor. enken wir uns $\mathfrak{p}$ in dieser Weise bezüglich der vorgegebenen Ebene ormiert, so können wir $\mathfrak{z}$ durch die Forderung $(\mathfrak{z}\mathfrak{p})=-1$ normieren. $\mathfrak{z}\mathfrak{p}_i)=0$ sind dann zwei Bedingungen, die die Lage von $\mathfrak{z}$ in der sten Ebene bestimmen werden. Da das normierte $\mathfrak{p}$ von Ableitungen rster Ordnung abhängt, so ist $\mathfrak{z}$ wegen $(\mathfrak{z}\mathfrak{p}_i)=0$ von zweiter Ordnung.

Wir können jetzt ein Normalkoordinatensystem [vgl. § 1 (1a)] so inführen, daß $\mathfrak{z}$ die Koordinaten bekommt: $(0,0,0,z_4,z_5,z_6)$, denn dann t nach (1a) $(\mathfrak{z}\mathfrak{z})=0$ und alle $\mathfrak{z}$ liegen in der durch die drei Geraden 1,0,0,0,0,0); (0,1,0,0,0,0); (0,0,1,0,0,0) gebildeten Ebene. eschränken wir uns auf solche ausgezeichnete Koordinatensysteme, so nd nur noch Transformationen der Linienkoordinaten $\mathfrak{p}$ möglich, die die rsten drei Koordinaten $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ unter sich linear transformieren, denn de Gerade, deren erste drei Koordinaten $=0$ sind, muß auch nach der ransformation diese Eigenschaft besitzen. *Die ersten drei Linienkoordiaten bilden also einen Vektor.* Die Verhältnisse $\mathfrak{p}_1:\mathfrak{p}_2:\mathfrak{p}_3$ geben nun die *Richtung* des Strahls an, denn alle Geraden mit gleichen Verhältnissen er drei ersten Koordinaten werden von demselben Büschel von Geraden n der festen („unendlich fernen") Ebene geschnitten[33]).

Nehmen wir den Strahl $\mathfrak{p}$ des Systems in seiner ausgezeichneten Norierung, so muß dem Vektor seiner drei ersten Koordinaten eine invariante

[33]) Die zu (1a) gehörige Bilinearform ist:

$$(\zeta\eta)=\zeta_1\eta_4+\zeta_2\eta_5+\zeta_3\eta_6+\zeta_4\eta_1+\zeta_5\eta_2+\zeta_6\eta_3$$

nd in der Bedingung für das Schneiden einer Geraden ζ mit einer unendlich fernen eraden η $[\eta_1=\eta_2=\eta_3=0]$: $(\zeta\eta)=0$, kommen nur $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ vor.

Bedeutung zukommen. Dieser Vektor muß die Richtung von $\mathfrak{p}$ haben und von Ableitungen erster Ordnung abhängen. Der die beiden Brennpunkte verbindende Vektor hat nun diese Eigenschaften. Da es nun keine affine Invariante eines Strahlensystems gibt, die nur von Ableitungen erster Ordnung abhängt, ist $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = p$ also bis auf einen unwesentlichen konstanten Faktor der die Brennpunkte verbindende Vektor. Hieraus kann man die Einsicht gewinnen, daß unsere Koordinaten mit den von W. Krause[34]) zur Behandlung der affinen Geometrie der Strahlensysteme verwandten im wesentlichen zusammenfallen. Aus $(\mathfrak{z}\mathfrak{p}) = -1 \quad (\mathfrak{z}\mathfrak{p}_i) = 0$ ergibt sich, daß die drei letzten Komponenten von $\mathfrak{z}$ einen kontravarianten Vektor z bilden. Es ist

$$z = -\frac{p_1 \times p_2}{|p, p_1, p_2|}, \tag{90}$$

wo $p_1 \times p_2$ das vektorielle Produkt, $|p, p_1, p_2|$ die Determinante der Vektoren ist. Trägt man die Vektoren p alle von einem festen Punkt ab, so erhalten wir eine Fläche $p(u^1, u^2)$: *das affine Krümmungsbild des Strahlensystems. $\mathfrak{z}$ ist nun, wie aus* (90) *zu ersehen, die Schnittgerade der Tangentialebene des Krümmungsbildes mit der festen Ebene.* Daraus ersieht man auch, daß $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ die zu dieser Ebene parallelen Tangenten der Brennmäntel sind.

Ähnlich wie in der konformen Geometrie der Kugelkongruenzen schließt man hier, daß es vier affine Differentialinvarianten eines Strahlensystems von zweiter Ordnung gibt. Wie dort, so werden auch hier die *Hauptkurven* $f_{ik} du^i du^k = 0$ des Systems eine wichtige Rolle spielen. Die Berechnung der *Affinnormalen* der Mäntel bietet keine Schwierigkeit.

Anhang.

Über projektive und affine Flächentheorie. (Höhere kugelgeometrische Flächentheorie.)

Mit Rücksicht auf die in der Einleitung gegebenen Bemerkungen wollen wir im Rahmen der im § 4 entwickelten projektiven Geometrie der Strahlensysteme jetzt die Bedingung dafür aufstellen, *daß der Strahl $\mathfrak{p}$ mit einer Darbouxtangente des einen Mantels zusammenfällt.* Führt man Torsen als Parameterscharen ein, so wird $g_{11} = g_{22} = 0$, und es muß, da $\mathfrak{p}$ die eine der den Torsen entsprechenden Kurven auf dem Mantel berührt, nach (74) etwa $s_{111} = 0$ sein. Die Tangente der Kurve $dv = 0$ ist dann Darbouxtangente. $s_{111} = 0$ ergibt nach (74) wegen $c_{11} \neq 0$,

[34]) W. Krause. Dissertation. Hamburg 1922. (Auszug). Vollständige Arbeit auf der Hamburgischen Staats- und Universitätsbibliothek und der preußischen Staatsbibliothek (Maschinenschrift).

$= 0$, $c_1^2 \neq 0$ [35]) die Bedingung $m_2 = 0$. Diese läßt sich aber invariant schreiben: $J = m^i m_i = 0$ (vgl. (76)).

Die Nullinien der Form g_{ik} auf dem ersten Mantel sind jetzt die ine Darbouxtangente und ihre konjugierte. Schließen wir den Fall aus, aß die Fläche des ersten Mantels eine F_2 ist ($m_i = 0$) [36]), so läßt sich eigen, daß $S \neq 0$ ist. (Vgl. 76.) Aus den beiden Gleichungen $J = 0$, $S = p^{ik} m_i m_k$ läßt sich nun nach (76) die Form m_i und nach (71), 83) auch die Form n_i aus den Formen g_{ik}, c_{ik}, $\bar{c}_{ik}$ und S berechnen. Da man die Koeffizienten von g_{ik} nach § 4 aus den Koeffizienten von c_{ik} nd $\bar{c}_{ik}$ berechnen kann, läßt sich jetzt im Anschluß an den am Schluß von 4 ausgesprochenen Satz die Aussage machen: Im allgemeinen[37]) ist eine läche durch Angabe der Formen c_{ik}, $\bar{c}_{ik}$ und der Invariante S bis auf pro- ektive Transformationen bestimmt.

Die Aufstellung der gleichen Bedingung in der affinen Geometrie der trahlensysteme würde auf eine affine Flächentheorie führen.

Möglicherweise sind aber andere Bedingungen zweckmäßiger. Man ann die Nullinien der Form g_{ik} mit irgendeinem invarianten konjugierten Kurvennetz der Fläche des Mantels zusammenfallen lassen. Die Tangenten n dieses Kurvennetz bilden dann die Strahlensysteme $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{v}$ [38]). Der cheinbaren Schwierigkeit solcher Untersuchungen gegenüber muß betont verden, daß namentlich in der projektiven Geometrie eine rein linien- eometrische Behandlung der Flächentheorie auf Grund des Dualitätsprinzip ie angemessenste sein dürfte, und daß schon in der allgemeinen Theorie er Strahlensysteme Sätze über die Flächentheorie der Mäntel verhältnis- näßig einfach zu gewinnen sind[39]).

Hamburg, 7. April 1924.

---

[35]) Vgl. (66), (67).

[36]) Vgl. § 4.

[37]) Nämlich, wenn die Fläche getrennte Brennmäntel hat, wenn sie nicht ab- vickelbar ist und keine F_2 ist und wenn die drei aus den Systemen der Darboux- angenten gebildeten Strahlensysteme nicht alle drei W-Strahlensysteme sind.

[38]) Man könnte in der projektiven Geometrie an die Nullinien der dritten von Fubini eingeführten Differentialform, in der affinen Geometrie an die affinen Krümmungslinien denken.

[39]) Die einfachste liniengeometrische Behandlungsweise der projektiven und ffinen Flächentheorie erhält man jedoch in dem Studium des aus den Asymptoten- angenten der einen der beiden Scharen bestehenden Strahlensystems, daß sich nach 2 der hier gegebenen Theorie entzieht. Vgl. Fußnote [11a]),

(Eingegangen am 9. April 1924.)

Über die lineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei unabhängigen Veränderlichen.

Von

W. Sternberg in Heidelberg.

Einleitung.

Wir untersuchen in dieser Arbeit die allgemeine lineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei unabhängigen Variablen

$$(\mathrm{I}) \qquad D(u) \equiv \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{3} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = d,$$

wobei $a_{ik} = a_{ki}$ und die quadratische Form $\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \alpha_i \alpha_k$ definit ist. Unser Hauptziel ist die Lösung von Randwertaufgaben. Es ist nicht schwer, das Studium von (I) auf das der folgenden selbstadjungierten homogenen Gleichung zu reduzieren:

$$(\mathrm{II}) \qquad L(u) \equiv \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = 0,$$

welche in den Koeffizienten der Ableitungen zweiter Ordnung mit (I) übereinstimmt. Die wesentliche Schwierigkeit gegenüber dem Falle von zwei unabhängigen Variablen besteht darin, daß für (I) keine Normalform existiert[1]). Bei der Zurückführung auf eine Form nämlich, in der die Koeffizienten der gemischten Ableitungen zweiter Ordnung sämtlich verschwinden, die der reinen Ableitungen einander gleich sind, wären fünf

[1]) Vgl. L. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, Enzyklop. der Math. Wiss. II, C, 12, insbes. II, 2, g.

Bedingungen zu erfüllen. Man hat aber bei einer Transformation der unabhängigen Variablen nur drei Funktionen verfügbar. Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial z}+du=f$$

ist daher eine spezielle Gleichung, während im zweidimensionalen Falle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=d$$

als allgemeinste Form angesehen werden kann. Diese Normalform wird bei zweidimensionalen Untersuchungen gewöhnlich zugrunde gelegt. Alle von solchen Untersuchungen herrührenden Methoden müssen aber in unserem Falle versagen. Wir behandeln also (I) bzw. (II) direkt. Die auftretenden Koeffizienten brauchen nicht analytische Funktionen zu sein, sondern nur gewissen Stetigkeitsbedingungen zu genügen. In der Theorie der Gleichung $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ wird das Verhalten der Lösungen im Unendlichen benutzt, um daraus Schlüsse auf gewisse Eigenschaften im Endlichen zu ziehen. Damit dieses wichtige Hilfsmittel auch hier angewandt werden kann, ist es nötig, die Koeffizienten über das gegebene Definitionsgebiet T_1 hinaus in den unendlichen Raum zweckmäßig fortzusetzen. Das geschieht so, daß $L(u)$ außerhalb einer T_1 einschließenden Kugel mit Δu identisch wird. Danach gelingt es schließlich, die Theorie der Gleichung (II) in ähnlicher Weise wie diejenige der Gleichung $\Delta u=0$ zu entwickeln. Man kann nämlich Lösungen von (II) in Form von Flächenintegralen angeben, welche die den Potentialen einer einfach oder einer doppelt belegten Fläche zukommenden charakteristischen Eigenschaften besitzen. Ferner kann insbesondere die erste und die zweite Randwertaufgabe[2]) gelöst werden, wozu wir ein Verfahren benutzen, das demjenigen entspricht, welches Fredholm[3]) zur Lösung des Dirichletschen Problems angewandt hat.

Hinsichtlich der Bezeichnung bemerken wir, daß wir statt (x_1, x_2, x_3) auch (x, y, z) und statt (ξ_1, ξ_2, ξ_3) auch (ξ, η, ζ) schreiben, sowie eigentlich kurz (x) resp. (ξ).

---

[2]) Vgl. L. Lichtenstein, l. c. II, 2, g. Herr Lichtenstein hat die dort skizzierten Gedanken weiter ausgeführt und mittels geeigneter kombinatorischer Methoden die Randwertaufgaben in einer Arbeit, welche in dieser Zeitschrift **20** (1924), S. 194–212, erschienen ist, gelöst. Die Entwicklungen der vorliegenden Abhandlung gehen andere Wege.

[3]) Fredholm, Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet. Öfversigt, Stockholm (1900), S. 39. — Vgl. ferner J. Plemelj, Potentialtheoretische Untersuchungen. Preisschrift der Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig (1911), S. 40ff.

§ 1.

Grundlösungen.

Die Untersuchung der allgemeinen elliptischen Differentialgleichung $D(u) = d$ wird zurückgeführt auf das Studium der sich selbst adjungierten Gleichung

$$L(u) = \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = 0 \qquad (a_{ik} = a_{ki}). \tag{1}$$

Auf diese Zurückführung gehen wir in § 7 ein.

Die Koeffizienten $a_{ik}(x_1, x_2, x_3)$ mögen in einem Raume T_1, welcher von einer analytischen und regulären Fläche S_1 begrenzt ist, stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich besitzen; die Ableitungen zweiter Ordnung erfüllen die Höldersche Bedingung. Unter dieser Voraussetzung bestimmt E. E. Levi[4]) eine sog. Grundlösung. Wir geben seine Resultate im einzelnen wieder, da wir sie im folgenden benötigen werden.

Weil $\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\alpha_i\alpha_k$ für jeden Punkt $P(x_1, x_2, x_3)$ von T_1 eine etwa positiv definite Form der Variablen α_i, α_k ist, muß die Koeffizientendeterminante $A = |a_{ik}|$ in T_1 ständig positiv sein. Sei $A_{ik}(x_1, x_2, x_3)$ die zu a_{ik} gehörige Unterdeterminante, dividiert durch A selbst. Es ist $A_{ik} = A_{ki}$. Die Form $\sum_{i,k=1}^{3} A_{ik}\alpha_i\alpha_k$ ist ebenfalls positiv definit.

Man definiert nun

$$\sigma(x, \xi) = \sum_{i,k=1}^{3} A_{ik}(x_1, x_2, x_3)(x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k). \tag{2}$$

Die Funktion $\sigma(x, \xi)$ verschwindet nur, wenn die beiden Punkte $P(x_1, x_2, x_3)$ und $Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ zusammenfallen. Es lassen sich zwei positive Zahlen g und G angeben, so daß für alle Punkte P und Q von T_1 die Ungleichungen gelten

$$g \cdot r \leqq \sigma^{\frac{1}{2}} \leqq G \cdot r, \tag{3}$$

wo $r^2 = \sum_{i=1}^{3}(x_i - \xi_i)^2$ ist. Man setzt weiter

$$\psi(x, \xi) = \frac{1}{[\sigma(x, \xi)]^{\frac{1}{2}}} \tag{4}$$

und

$$\Gamma(x, \xi) = \psi(x, \xi) + \int_{T_1} \psi(x, t) f(t, \xi)\, dt \qquad (dt = \text{Volumenelement}). \tag{5}$$

[4]) E. E. Levi, Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali. Rend. del circ. mat. di Palermo 24 (1907), S. 275–317. — S. a. Hadamard, Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles, Ann. Sc. de l'Éc. Norm. Sup. (3) 21 (1904), S. 535–556. Hier werden jedoch die gegebenen Koeffizienten als analytisch vorausgesetzt.

Die Funktion $f(t, \xi)$ wird durch die Forderung bestimmt, daß $\Gamma(x, \xi)$ ls Funktion von (x) der Gleichung (1) genügen soll. Man erhält dann f ls Lösung einer Fredholmschen Integralgleichung. Für alle voneinander erschiedenen Punkte (x) und (ξ) von T_1 ist $f(x, \xi)$ stetig. Für $(x) \equiv (\xi)$ ird sie unendlich, und zwar von höchstens erster Ordnung in bezug uf $\frac{1}{r}$. Die Funktion

$$W(x, \xi) = \int_{T_1} \psi(x, t) f(t, \xi)\, dt \tag{6}$$

st, außer für $(x) \equiv (\xi)$, in T_1 nebst ihren partiellen Ableitungen bis zur weiten Ordnung einschließlich stetig. Für $(x) \equiv (\xi)$ hat sie eine Singuarität. Sie wird dort höchstens logarithmisch, ihre ersten Ableitungen öchstens von erster Ordnung unendlich. Daher kann $\psi(x, \xi)$ als Hauptteil von $\Gamma(x, \xi)$ bezeichnet werden.

Multipliziert man $\Gamma(x, \xi)$ mit einer zweimal stetig differentiierbaren unktion von (ξ) allein, so erhält man wieder eine Grundlösung, ebenso, enn man eine zweimal stetig differentiierbare Funktion von (x) addiert, elche (1) löst.

§ 2.

Greensche Formeln.

Wir leiten jetzt die Greenschen Integralformeln ab und ziehen aus hnen Schlüsse auf die Eindeutigkeit der Lösungen von Randwertaufgaben nd auf die Darstellung beliebiger Lösungen von (1) durch Oberflächenntegrale. Sei T ein ganz im Innern von T_1 enthaltenes Gebiet, das on einer stetig gekrümmten Fläche S begrenzt ist. Seien $u(x_1, x_2, x_3)$ nd $v(x_1, x_2, x_3)$ zwei beliebige Funktionen, welche nebst den Ableitungen rster und zweiter Ordnung in $T + S$ stetig sind. Es gilt die Identität

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial p_i}{\partial x_i} - u\, L(v),$$

enn zur Abkürzung

$$p_i = u \sum_{k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_k} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

esetzt ist. Durch Integration über T findet man, wenn $d\tau$ das Element on T, $d\omega$ das von S ist,

$$\int_T \Big\{ \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \Big\} d\tau = - \int_S \Big\{ \sum_{i=1}^{3} p_i \cos(n, x_i) \Big\} d\omega - \int_T u\, L(v)\, d\tau; \tag{7}$$

hierin bezeichnet (n) die innere Normale. Nun ist

$$-\int_S \{\sum_{i=1}^{3} p_i \cos(n, x_i)\}\, d\omega = \int_S u\,\delta(v)\, d\omega, \tag{8}$$

wenn

$$-\sum_{i=1}^{3} \cos(n, x_i) \sum_{k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_k} = \delta(v) \tag{9}$$

geschrieben wird. Demnach hat man schließlich die Greensche Formel

$$\int_T \Big\{\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k}\Big\}\, d\tau = \int_S u\,\delta(v)\, d\omega - \int_T u\, L(v)\, d\tau. \tag{10}$$

Für $u = 1$ erhält man daraus

$$\int_S \delta(v)\, d\omega - \int_T L(v)\, d\tau = 0 \tag{10_1}$$

und, wenn v eine Lösung von (1) ist,

$$\int_S \delta(v)\, d\omega = 0. \tag{10_2}$$

Für $u = v$ ergibt sich, wenn u eine Lösung von (1) ist,

$$\int_T \Big\{\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k}\Big\}\, d\tau = \int_S u\,\delta(u)\,\delta\omega. \tag{11}$$

Diese Gleichung bleibt richtig, wenn die Lösung u von (1) nur im Innern von T „regulär", d. h. zweimal stetig differentiierbar ist, wenn zugleich der Differentialausdruck erster Ordnung $\delta(u)$ in $T + S$ stetig ist. Denkt man sich nämlich eine ganz in T gelegene, zu S parallele Fläche S', welche einen Raum T' begrenzt, so ist zunächst

$$\int_{T'} \Big\{\sum a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k}\Big\}\, d\tau = \int_{S'} u\,\delta(u)\, d\omega.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar (11), indem man mit S' zur Grenze S übergeht und die Stetigkeitseigenschaften berücksichtigt.

Nun kann man einen Schluß auf die Eindeutigkeit der Lösungen der Randwertaufgaben ziehen. Nimmt man nämlich an, daß die Lösung u von (1) die für (11) hinreichenden Stetigkeitseigenschaften besitzt und auf S einer der beiden Bedingungen $u = 0$ oder $\delta(u) = 0$ genügt, so folgt

$$\int_T \Big\{\sum a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k}\Big\}\, d\tau = 0.$$

Da aber die quadratische Form $\sum a_{ik}\alpha_i\alpha_k$ definit ist, so muß in T identisch $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$ sein. Mithin ist $u =$ konst., speziell $u = 0$,

wenn die erste Randbedingung gilt. Die erste Randwertaufgabe hat also höchstens eine, die zweite bis auf eine willkürliche additive Konstante höchstens eine Lösung.

Aus dem vorstehenden Eindeutigkeitssatz ergibt sich, daß eine in T reguläre, in $T+S$ stetige Lösung u von (1) sowohl ihr Maximum wie ihr Minimum auf dem Rande S erreicht. Denn man nehme z. B. an, u würde in einem Punkte P von T einen Wert M erreichen, der größer ist als das Maximum μ der Werte auf S. Wir wählen ein ε so, daß $\mu < \mathsf{M} - \varepsilon < \mathsf{M}$ ist. Dann existiert auf jedem durch P gehenden Halbstrahl sicherlich mindestens ein Punkt von T, in dem $u = \mathsf{M} - \varepsilon$ ist. Es sei Θ das größte den Punkt P enthaltende Gebiet, in dem $u > \mathsf{M} - \varepsilon$ ist. Auf dem Rande Σ von Θ ist augenscheinlich $u = \mathsf{M} - \varepsilon$. Die vorstehenden Überlegungen lassen sich ohne jede Änderung auf das Gebiet Θ anwenden, da $\delta(u)$ auch noch auf Σ stetig ist. Also müßte im ganzen Innern von Θ, insbesondere in P selbst $u = \mathsf{M} - \varepsilon$ sein, während dort gerade $u = \mathsf{M}$ sein soll. Darin liegt der Widerspruch. Den Satz über die Extrema kann man wiederum benutzen, um den Eindeutigkeitssatz im Falle der ersten Randbedingung zu verschärfen. Es läßt sich jetzt nämlich zeigen, daß eine jede in T reguläre, in $T+S$ stetige Lösung u von (1), die auf S verschwindet, auch in T verschwinden muß (während vorhin noch angenommen werden mußte, daß $\delta(u)$ in $T+S$ stetig ist); denn würde u in irgendeinem Punkte von T einen positiven resp. einen negativen Wert annehmen, so könnte das Maximum resp. das Minimum nicht auf dem Rande S liegen. Es genügt sogar, wie leicht ersichtlich, daß u oder auch daß $\delta(u)$ bei Annäherung von (x) an S Grenzwerten zustreben, die eine bloß abteilungsweise stetige Randfunktion darstellen. Natürlich kann dann von Konvergenz gegen die Randfunktion nur in deren Stetigkeitsstellen die Rede sein. Bei Annäherung an die Unstetigkeitsstellen wird Beschränktheit verlangt.

Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen geben wir die Greensche Formel noch für den Außenraum T_a von S an. Ist die Lösung u von (1) in T_a regulär und $\delta(u)$ in $T_a + S$ stetig, so gilt offenbar

$$(11^*) \qquad \int_{T_a} \left\{ \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\} d\tau = \int_S u\,\delta(u)\,d\omega,$$

wenn die Limesgleichung

$$(12) \qquad \lim_{R=\infty} \int_K u\,\delta(u)\,d\omega = 0$$

erfüllt ist. Dabei bezeichnet K die Kugel um den Anfangspunkt vom

Radius $R = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2}$. Daraus schließt man wie oben, daß, wenn auf S entweder $u = 0$ oder $\delta(u) = 0$ ist, im ganzen Außenraum $u =$ konst. sein muß. Speziell ist identisch $u = 0$ auch im Falle von $\delta(u) = 0$, wenn $\lim_{R=\infty} u = 0$ ist. Was die Voraussetzung (12) betrifft, so ist diese erfüllt, wenn $\lim_{R=\infty} R^2 u\,\delta(u) = 0$ gilt, also z. B. für

$$\lim_{R=\infty} u = 0, \quad \delta(u) = O\left(\frac{1}{R^2}\right)^{5}). \tag{13}$$

Die letztere Gleichung ist sicher richtig, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{13$_1$}$$

ist und die Koeffizienten a_{ik} im ganzen Raume beschränkt sind.

Im Falle der ersten Randbedingung gilt unter der Voraussetzung $\lim_{R=\infty} u = 0$ auch für den Außenraum die Verschärfung des Eindeutigkeitsatzes, wonach neben Regularität in T_a nur die Stetigkeit von u selbst in $T_a + S$ angenommen wird.

Wir kommen zurück auf (10) und vertauschen dort u mit v. Durch Subtraktion der neuen Gleichung von der ursprünglichen findet man

$$\int_T \{u\,L(v) - v\,L(u)\}\,d\tau = \int_S \{u\,\delta(v) - v\,\delta(u)\}\,d\omega. \tag{14}$$

Diese Formel wenden wir an auf die Grundlösung $u = \Gamma(x, \xi)$ und eine Lösung $v = w$ von (1), welche in T regulär und für die $\delta(v)$ auch noch bei Annäherung an S stetig ist. Der Punkt (ξ, η, ζ) soll in T, d. h. innerhalb S, liegen und wird durch eine kleine Kugel mit Radius ϱ vom Integrationsraume ausgeschlossen. Es folgt leicht

$$0 = \int_T \{\Gamma L(w) - w L(\Gamma)\}\,d\tau = \int_S \{\Gamma\delta(w) - w\delta(\Gamma)\}\,d\omega + \lim_{\varrho=0} \int_K \{\Gamma\delta(w) - w\delta(\Gamma)\}$$

Nun gilt aber

$$\lim_{\varrho=0} \int_K \{\Gamma\delta(w) - w\,\delta(\Gamma)\}\,d\omega = -\,w(\xi, \eta, \zeta) \lim_{\varrho=0} \int \delta(\Gamma)\,d\omega$$
$$= -\,4\pi E(\xi, \eta, \zeta)\,w(\xi, \eta, \zeta),$$

wenn

$$\lim_{\varrho=0} \int_K \delta(\Gamma)\,d\omega = 4\pi E(\xi, \eta, \zeta) \tag{15}$$

gesetzt ist. Daher

$$4\pi E(\xi, \eta, \zeta)\,w(\xi, \eta, \zeta) = \int_S \{\Gamma\delta(w) - w\,\delta(\Gamma)\}\,\delta\omega. \tag{16}$$

---

[5]) Wir benutzen bei Limesgleichungen die bekannte durch E. Landau eingebürgerte Bezeichnungsweise.

Dividieren wir (16) durch die wesentlich positive zweimal stetig differentiierbare (s. u.) Funktion $E(\xi, \eta, \zeta)$ und setzen

$$K(x, \xi) = \frac{\Gamma(x, \xi)}{E(\xi)}, \tag{17}$$

sodaß auch $K(x, \xi)$ als Funktion von (x) Grundlösung von (1) ist, so folgt

$$w(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \int_S \{K \delta(w) - w \delta(K)\} d\omega. \tag{18}$$

Auf (15) gehen wir jetzt näher ein und bilden $\delta(\Gamma) = \delta(\psi) + \delta(W)$. Auf der Kugel K ist

$$r = \left[\sum_{i=1}^{3} (x_i - \xi_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \varrho \quad \text{und} \quad \delta(W) = O\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

daher

$$\lim_{\varrho=0} \int_K \delta(W) d\omega = 0.$$

Um

$$\delta(\psi) = -\sum_{i=1}^{3} \cos(n, x_i) \sum_{k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}$$

zu erhalten, berechnen wir

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \psi(x, \xi) = -\frac{1}{[\sigma(x, \xi)]^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=1}^{3} A_{1k}(x)(x_k - \xi_k)$$

$$- \frac{1}{[\sigma(x, \xi)]^{\frac{3}{2}}} \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial A_{ik}(x)}{\partial x_1} (x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k),$$

analog $\frac{\partial \psi}{\partial x_2}$ und $\frac{\partial \psi}{\partial x_3}$. Es wird also

$$\delta(\psi) = \frac{1}{[\sigma(x, \xi)]^{\frac{3}{2}}} \sum_{i,s,k=1}^{3} a_{is} A_{sk} (x_k - \xi_k) \cos(n, x_i) + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=1}^{3} (x_i - \xi_i) \cos(n, x_i) + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\delta(\psi) = \frac{r \cos(r, n)}{\sigma^{\frac{3}{2}}(x, \xi)} + 0\left(\frac{1}{r}\right). \tag{19}$$

Man erhält nach Einführung von Polarkoordinaten

$$x_1 - \xi_1 = \varrho \sin\vartheta \cos\varphi, \quad x_2 - \xi_2 = \varrho \sin\vartheta \sin\varphi, \quad x_3 - \xi_3 = \varrho \cos\vartheta,$$

$$\lim_{\varrho=0} \int \delta(\Gamma) d\omega = \lim_{\varrho=0} \int \delta(\psi) d\omega = \lim_{\varrho=0} \int \frac{\varrho^3 \sin\vartheta}{\sigma^{\frac{3}{2}}(x, \xi)} d\vartheta \, d\varphi$$

und ferner

$$\lim_{\varrho=0}\int \frac{\varrho^3}{\sigma^{\frac{3}{2}}(x,\xi)}\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = \lim_{\varrho=0}\int \frac{\varrho^3}{\sigma^{\frac{3}{2}}(\xi,x)}\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi,$$

da

$$\varrho^3\left\{\frac{1}{\sigma^{\frac{3}{2}}(x,\xi)} - \frac{1}{\sigma^{\frac{3}{2}}(\xi,x)}\right\} = O(\varrho)$$

leicht zu beweisen ist. Demnach wird

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} 4\pi E(\xi) &= \lim_{\varrho=0}\int \frac{\varrho^3}{\sigma^{\frac{3}{2}}(\xi,x)}\sin\vartheta\,d\vartheta d\varphi \\ &= \lim_{\varrho=0}\int \frac{\sin\vartheta}{\left\{\sum_{i.k} A_{ik}(\xi)\left(\frac{x_i-\xi_i}{\varrho}\right)\left(\frac{x_k-\xi_k}{\varrho}\right)\right\}^{\frac{3}{2}}}\,d\vartheta\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta\,d\vartheta}{\Delta_1^{\frac{3}{2}}}\,d\vartheta, \end{aligned}\right.$$

wo

$$\Delta_1 = A_{11}(\xi)\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + A_{22}(\xi)\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + A_{33}(\xi)\cos^2\vartheta$$
$$+ 2A_{12}(\xi)\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + 2A_{13}(\xi)\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi + 2A_{23}(\xi)\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi$$

gesetzt ist.

Da die quadratische Form im Nenner des Integranden positiv definit ist, muß $E(\xi)$ in ganz T positiv sein. Ferner ist $E(\xi)$ ebenso wie die $A_{ik}(\xi)$ zweimal stetig differentiierbar. Wenden wir (14) auf das Ringgebiet zwischen der Kugel K und irgendeiner K einschließenden Fläche, z. B. S an und setzen $w \equiv 1$, so finden wir

$$(21)\qquad \int_S \delta(\Gamma)\,d\omega = \int_K \delta(\Gamma)\,d\omega = 4\pi E(\xi).$$

Das Integral hat also für alle den Punkt (ξ) einschließenden Flächen denselben Wert $4\pi E$. Liegt (ξ) außerhalb S, so erhält man

$$\int_T \{\Gamma L(w) - w L(\Gamma)\}\,d\tau = \int_S \{\Gamma\delta(w) - w\delta(\Gamma)\}\,d\omega = 0$$

und für $w \equiv 1$

$$(22)\qquad \int_S \delta(\Gamma)\,d\omega = 0.$$

Liegt (ξ) auf S selbst, so beschreibe man um ihn eine kleine Kugel vom Radius ϱ, bezeichne deren in T liegenden Teil mit H, die von ihr auf S ausgeschnittene Fläche mit γ und wende die Greensche Formel auf das von $S-\gamma$ und H begrenzte Gebiet an. Dann ergibt sich

$$\int_{S-\gamma} \{\Gamma\delta(w) - w\delta(\Gamma)\}\,d\omega + \int_H \{\Gamma\delta(w) - w\delta(\Gamma)\,d\omega = 0.$$

Richtet man die Normale im zweiten Integral positiv ins Innere von H, setzt $w \equiv 1$ und geht zur Grenze über, so folgt

$$(23)\qquad \int_S \delta(\Gamma)\,d\omega = \lim_{\varrho=0}\int_H \delta(\Gamma)\,d\omega.$$

Analog wie oben findet man

$$24)\quad \lim_{\varrho=0}\int_H \delta(\Gamma)\,d\omega = \lim_{\varrho=0}\int \frac{\varrho^3 \sin\vartheta}{\{\sum_{i,k} A_{ik}(\xi)(x_i-\xi_i)(x_k-\xi_k)\}^{\frac{3}{2}}}\,d\vartheta\,d\varphi = 4\pi G(\xi).$$

Das Integrationsgebiet ist die um (ξ, η, ζ) mit dem Radius 1 gebogene Halbkugel, die auf der Tangentialebene in (ξ, η, ζ) senkrecht steht.

Wir beweisen jetzt die Identität

$$25)\quad G(\xi, \eta, \zeta) = \frac{E(\xi, \eta, \zeta)}{2}.$$

Hierzu machen wir (ξ) zum Anfangspunkt, setzen etwa $x_i - \xi_i = s_i$ und nehmen noch eine Drehung vor. Heißen die neuen Koordinaten t_i, so soll die Tangentialebene in (ξ) die (t_1, t_2)-Ebene werden. Es ist etwa $s_i = \sum_{k=1}^{3} b_{ik} s_k$, wo die b_{ik} Funktionen von (ξ) bedeuten. Man hat $G = \lim_{\varrho=0} J$, wenn man

$$J = \varrho\int_H \frac{d\omega}{\{\Sigma A_{ik}(x_i-\xi_i)(x_k-\xi_k)\}^{\frac{3}{2}}} = \varrho\int_H \frac{d\omega}{\{\Sigma A_{ik} s_i s_k\}^{\frac{3}{2}}} = \varrho\int_H \frac{d\omega}{\{\Sigma B_{ik} t_i t_k\}^{\frac{3}{2}}}$$

setzt. Endlich gebrauchen wir noch Polarkoordinaten $t_1 = \varrho\sin\vartheta\cos\varphi$, $t_2 = \varrho\sin\vartheta\sin\varphi$, $t_3 = \varrho\cos\vartheta$, die also eine gegen früher (Gl. 24) etwas abgeänderte Bedeutung haben. Geht man zur Grenze $\varrho = 0$ über, so ist das Integrationsgebiet die auf der (t_1, t_2)-Ebene errichtete Halbkugel vom Radius 1. Daher wird $0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leqq \varphi \leqq \pi$. Mithin ist

$$G(\xi) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta}{\Delta_2^{\frac{3}{2}}}\,d\vartheta,$$

wenn man

$$\Delta_2 = B_{11}\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + B_{22}\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + B_{33}\cos^2\vartheta$$
$$+ 2B_{12}\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + 2B_{13}\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi + 2B_{23}\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi$$

setzt.

Andererseits ist

$$E(\xi) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta\,d\vartheta}{\Delta_2^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta}{\Delta_2^{\frac{3}{2}}}\,d\vartheta + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin\vartheta}{\Delta_2^{\frac{3}{2}}}\,d\vartheta.$$

Es genügt zu zeigen, daß

$$G = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta}{\Delta_2^{\frac{3}{2}}}\,d\vartheta = F = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin\vartheta}{\Delta_2^{\frac{3}{2}}}\,d\vartheta \text{ ist.}$$

Setzen wir

$$\vartheta = \pi - \gamma, \quad \text{also } \sin\vartheta = \sin\gamma, \quad \cos\vartheta = -\cos\gamma,$$

$$\Delta_3 = B_{11}\sin^2\gamma\cos^2\varphi + B_{22}\sin^2\gamma\sin^2\varphi + B_{33}\cos^2\gamma$$
$$+ 2B_{12}\sin^2\gamma\sin\varphi\cos\varphi - 2B_{13}\sin\gamma\cos\gamma\cos\varphi - 2B_{23}\sin\gamma\cos\gamma\sin\varphi,$$

so wird

$$F = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\Delta_2^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\gamma\, d\gamma}{\Delta_3^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\gamma}{\Delta_3^{\frac{3}{2}}}\, d\gamma + \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\gamma}{\Delta_3^{\frac{3}{2}}}\, d\gamma.$$

Im ersten Integral rechts schreiben wir $\varphi = \alpha - \pi$, im zweiten $\varphi = \beta + \alpha$; dann folgt

$$F = \int_0^{\pi} d\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\gamma\, d\gamma}{\Delta_2^{\frac{3}{2}}} + \int_{\pi}^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\gamma\, d\gamma}{\Delta_2^{\frac{3}{2}}}.$$

Nun stimmt F bis auf die Bezeichnung der Integrationsvariablen völlig mit G überein. Daher ist $F = G$, und somit (25) bewiesen. Wir haben also, wenn (ξ) auf S selbst liegt,

$$\int_S \delta(\Gamma)\, d\omega = 2\pi E(\xi, \eta, \zeta). \tag{26}$$

Indem man die durch (17) definierte Funktion $K(x, \xi)$ benutzt, kann man schreiben

$$\int_S \delta(K)\, d\omega = \begin{cases} 4\pi, & \text{wenn } (\xi, \eta, \zeta) \text{ innerhalb } S \text{ liegt} \\ 2\pi, & \text{„ „ auf „ „} \\ 0, & \text{„ „ außerhalb „ „} \end{cases}. \tag{27}$$

§ 3.

Verhalten im Unendlichen. Symmetrische Grundlösung.

Um wie in der Potentialtheorie aus dem Verhalten der Lösungen im Unendlichen Schlüsse auf ihre Eigenschaften im Endlichen zu ziehen, müssen wir die Koeffizienten a_{ik} von (1) über das gegebene Definitionsgebiet hinaus fortsetzen.. Sie seien, wie vorhin, in einem T enthaltenden Gebiet T_1 definiert, welches von einer analytisch-regulären Fläche S_1 begrenzt ist. Wir setzen sie mit stetigen der Hölderschen Bedingung genügenden Ableitungen zweiter Ordnung unter Wahrung des elliptischen Charakters der Differentialgleichung so fort, daß außerhalb einer um den

nfangspunkt mit dem Radius R_0 beschriebenen Kugel T, welche T_1 in rem Innern enthält, die Identitäten gelten

$$38) \quad a_{ik}(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3), \qquad \varepsilon_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k, \\ 0 & \text{„ } i \neq k. \end{cases}$$

u diesem Zwecke definieren wir P_{ik} in T_1 durch die Gleichung

$$(R - R_0)^m P_{ik} + \varepsilon_{ik} = a_{ik},$$

o $R = [\sum_{i=1}^{3} x_i^2]^{\frac{1}{2}}$ und die positive ganze Zahl $m \geqq 4$ ist, und setzen die $_{ik}$ über S_1 hinaus bis zur Kugelfläche irgendwie mit stetigen, der Hölder-hen Bedingung genügenden Ableitungen zweiter Ordnung fort. Dann efinieren wir

$$a_{ik} = \begin{cases} (R - R_0)^m P_{ik} + \varepsilon_{ik} & \text{für } R \leqq R_0, \\ \varepsilon_{ik} & \text{„ } R > R_0. \end{cases}$$

a die P_{ik} in dem Ringe zwischen S_1 und der Kugelfläche bis auf Stetig-itseigenschaften willkürlich sind, können sie so gewählt werden, daß in em Ringe die Differentialgleichung elliptisch bleibt.

Zugleich mit den a_{ik} ist auch $\sigma(x, \xi)$ fortgesetzt, und für alle (x) ußerhalb T und beliebige (ξ) ist identisch $\sigma(x, \xi) = \sum_i (x_i - \xi_i)^2 = r^2$,

so $\psi(x, \xi) = \frac{1}{r}$, ferner $E(x, y, z) = 1$. Wir wollen nun eine Grund-sung, für die wir die Bezeichnung $\Gamma(x, \xi)$ beibehalten, im ganzen un-ndlichen Raume definieren. Hierzu machen wir, wenn T_1 einen beliebig roßen, die Kugel T enthaltenden etwa von einer Kugel begrenzten Raum edeutet, den Ansatz

$$39) \qquad \Gamma(x, \xi) = \psi(x, \xi) + \int_{T_1} \psi(x, t) f(t, \xi)\, dt.$$

Die Integralgleichung zur Bestimmung von f lautet

$$40) \quad L(\Gamma(x, \xi)) = L(\psi(x, \xi)) - 4\pi E(x) f(x, \xi) + \int_{T_1} L(\psi(x, t)) f(t, \xi)\, dt = 0.$$

Liegt nun (x, y, z) außerhalb T, so gilt identisch in (x) und (ξ) die leichung $L(\psi) = \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$. Daher ist $f(x, \xi) = 0$ für alle (x) außer-lb T und beliebige (ξ). Mithin wird aus (29)

$$39_1) \qquad \Gamma(x, \xi) = \psi(x, \xi) + \int_{T} \psi(x, t) f(t, \xi)\, dt,$$

nd $f(x, \xi)$ bestimmt sich für die Punkte von T_1, d. h. für beliebige (x) nd (ξ) durch

$$40_1) \quad L(\psi(x, \xi)) - 4\pi E(x) f(x, \xi) + \int_{T} L(\psi(x, t)) f(t, \xi)\, dt = 0.$$

Neben $f(x, \xi)$ und $\Gamma(x, \xi)$ ist jetzt auch $K(x, \xi) = \frac{\Gamma(x, \xi)}{E(\xi)}$ im nzen Raume definiert. Von dieser Funktion $K(x, \xi)$ wollen wir noch

die Symmetrie in (x) und (ξ) nachweisen. Dazu müssen wir das Verhalten von $\Gamma(x, \xi)$ als Funktion von (x) im Unendlichen, d. h. für $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty$ kennen lernen. Für $R > R_0$ gilt die Identität $\psi(x, \xi) = \frac{1}{r}$, also

$$(31_1) \qquad \Gamma(x, \xi) = \frac{1}{r_{x\xi}} + \int_T \frac{1}{r_{xt}} f(t, \xi)\, dt = O\left(\frac{1}{R}\right),$$

$$(31_2) \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = -\frac{x_i - \xi_i}{r^3_{x\xi}} - \int_T \frac{x_i - t_i}{r^3_{xt}} f(t, \xi)\, dt = O\left(\frac{1}{R^2}\right), \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$(31_3) \qquad \delta(\Gamma) = -\sum_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \cos(n, x_i) = O\left(\frac{1}{R^3}\right).$$

Seien nun $Q_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ und $Q_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ irgend zwei Punkte im Endlichen. Auf die Funktionen

$$\Gamma_1 = \Gamma(x, y, z;\ \xi_1, \eta_1, \zeta_1) \quad \text{und} \quad \Gamma_2 = \Gamma(x, y, z;\ \xi_2, \eta_2, \zeta_2)$$

wenden wir die Greensche Formel an. Das Integrationsgebiet ist das Innere einer großen Kugel K mit dem Radius R um den Anfangspunkt, von der zwei kleine Kugeln K_1 und K_2 um Q_1 resp. Q_2 mit den Radien ϱ_1 resp. ϱ_2 herausgeschnitten sind. Dann erhalten wir

$$\int [\Gamma_2 L(\Gamma_1) - \Gamma_1 L(\Gamma_2)]\, d\tau = \int_K [\Gamma_2 \delta(\Gamma_1) - \Gamma_1 \delta(\Gamma_2)]\, d\omega + \int_{K_1} + \int_{K_2} = 0.$$

Nun ist $\lim_{R=\infty} \int_K = 0$, weil

$$\Gamma_2 \delta(\Gamma_1) - \Gamma_1 \delta(\Gamma_2) = O\left(\frac{1}{R^3}\right)$$

gilt und der Flächeninhalt des Integrationsgebietes $= O(R^2)$ ist. Ferner erhält man in bekannter Weise

$$\lim_{\varrho_1 = 0} \int_{K_1} = 4\pi E(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, \Gamma(\xi_1, \eta_1, \zeta_1;\ \xi_2, \eta_2, \zeta_2),$$

$$\lim_{\varrho_2 = 0} \int_{K_2} = -4\pi E(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)\, \Gamma(\xi_2, \eta_2, \zeta_2;\ \xi_1, \eta_1, \zeta_1).$$

Daher ist

$$E(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, \Gamma(\xi_1, \eta_1, \zeta_1;\ \xi_2, \eta_2, \zeta_2) - E(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)\, \Gamma(\xi_2, \eta_2, \zeta_2;\ \xi_1, \eta_1, \zeta_1) = 0$$

oder

$$(32) \qquad K(\xi_1, \eta_1, \zeta_1;\ \xi_2, \eta_2, \zeta_2) = K(\xi_2, \eta_2, \zeta_2;\ \xi_1, \eta_1, \zeta_1).$$

Aus der Symmetrie folgt z. B., daß $K(x, \xi)$ auch als Funktion von (ξ) Grundlösung von (1) ist.

§ 4.

Raum- und Oberflächenintegrale.

Aus den Entwicklungen des § 2 geht unmittelbar hervor, daß jede nktion $u(x, y, z)$, die in T regulär und für die $\delta(u)$ in $T+S$ stetig , in der Form

$$4\pi u(x) = -\int_T K L(u)\, d\tau + \int_S \{K\delta(u) - u\delta(K)\}\, d\omega$$

rgestellt werden kann, wobei jetzt ξ, η, ζ die Integrationsvariablen sind. u eine Lösung von (1), so fällt das Raumintegral fort. Wir unterchen nun das Raum- und die beiden Flächenintegrale einzeln für sich, dem wir für $L(u)$ bzw. u oder $\delta(u)$ gegebene Funktionen setzen. Wir tersuchen also

$$U(x) = \int_T K(x, \xi)\, \varrho(\xi)\, d\tau, \tag{3}$$

$$V(x) = \int_S K(x, \xi)\, \varkappa(\xi)\, d\omega, \tag{4}$$

$$W(x) = \int_S \delta(K(x, \xi))\, \mu(\xi)\, d\omega. \tag{5}$$

Hierin sind $\varrho, \varkappa, \mu$ als bekannt anzusehen. Es sei die Funktion ϱ bst ihren ersten Ableitungen in T, $\varkappa$ und μ auf S stetig. In (35) ist beachten, daß bei der Operation $\delta(K(x, \xi))$ nach ξ, η, ζ differentiiert rd. Die Funktion U enspricht dem Newtonschen Raumpotential, V d W den Flächenpotentialen einer einfachen resp. einer doppelten Begung. Daher ist zu beweisen: Für innere Punkte (x) genügt U der eichung

$$L(U) = -4\pi\varrho, \tag{6}$$

e das Analogon zur Poissonschen Gleichung ist. Für äußere ist natürh $L(U) = 0$. Für alle Punkte (x), die nicht auf S selbst liegen, gegen V und W der Gleichung $L(u) = 0$. Die Funktion V bleibt beim rchgange von (x) durch S stetig. Unterscheidet man also die innere d die äußere Seite von S durch die Indizes 1 und 2 und bezeichnet e Grenzwerte von V mit V_1 resp. V_2, so ist

$$V_1 - V_2 = 0. \tag{7}$$

gegen wird $\delta(V)$ beim Durchgange durch S sprungweise unstetig, und ar hat man

$$\delta_1(V) - \delta_2(V) = -4\pi\varkappa. \tag{8}$$

s Verhalten von W ist gekennzeichnet durch die Gleichungen

$$W_1 - W_2 = 4\pi\mu, \tag{9}$$

$$\delta_1(W) - \delta_2(W) = 0. \tag{10}$$

Bezeichnet W_s den Wert von W im Punkte s der Fläche S selbst, so ist noch

$$\frac{1}{2}(W_1 + W_2) = W_s. \tag{41}$$

Ebenso tritt zu (38)

$$\frac{1}{2}(\delta_1(V) + \delta_2(V)) = \int_S \delta(K(s,\xi))\varkappa(\xi)\,d\omega \tag{42}$$

hinzu. Die Variablen, nach denen hier in dem Ausdruck $\delta(K)$ differentiiert wird, sind x, y, z. Das Verhalten von U, V, W im Unendlichen ergibt sich aus dem von K oder Γ. Da alle drei Funktionen dieselben Limesgleichungen erfüllen, geben wir sie nur für U an:

$$U = O\left(\frac{1}{R}\right), \quad \frac{\partial U}{\partial x_i} = O\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad \delta(U) = O\left(\frac{1}{R^2}\right). \tag{43}$$

§ 5.

Analogon zur Poissonschen Gleichung.

Wir untersuchen statt der Funktion $U(x)$ von (33) zunächst

$$F(x) = \int_T \psi(x,\xi)\varrho(\xi)\,d\tau.$$

Da

$$\psi(x,\xi) = O\left(\frac{1}{r}\right) \text{ für } r = \left[\sum_{i=1}^{3}(x_i - \xi_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ist, kann die erste Differentiation unter dem Integralzeichen vollzogen werden[6]). Es ist also

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \int_T \frac{\partial \psi}{\partial x_k}\varrho\,d\tau \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3.$$

Nun hat man

$$\frac{\partial \psi(x,\xi)}{\partial x_k} = -\frac{\partial \psi(x,\xi)}{\partial \xi_k} - \frac{1}{2\sigma^{\frac{3}{2}}(x,\xi)}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_k}(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)$$

$$= -\frac{\partial \psi(x,\xi)}{\partial \xi_k} + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

daher

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_k} = -\int_T \frac{\partial \psi(x,\xi)}{\partial \xi_k}\varrho(\xi)\,d\tau$$

$$-\frac{1}{2}\int_T \frac{\varrho(\xi)}{\sigma^{\frac{3}{2}}(x,\xi)}\left\{\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_k}(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)\right\}d\tau = M_k + N_k.$$

[6]) Vgl. z. B. E. E. Levi, l. c. S. 314.

s gilt weiter

$$M_k = +\int_S \varrho(\xi)\,\psi(x,\xi)\cos(n,x_k)\,d\omega + \int_T \psi(x,\xi)\frac{\partial \varrho}{\partial \xi_k}\,d\tau = P_k + Q_k.$$

lso ist

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = P_k + Q_k + N_k \qquad (k=1,2,3)$$

nd

$$L(F) = \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ik}P_k) + \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ik}Q_k) + \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ik}N_k).$$

Was zunächst das Integral N_k betrifft, so ist der Integrand $= O\left(\frac{1}{r}\right)$, odaß die Differentiation unter dem Integralzeichen ausgeführt werden arf[6]). Für Q_k gilt dasselbe. Ferner hat man

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ik}P_k) = \int_S \frac{\partial}{\partial x_i}[a_{ik}(x)\,\psi(x,\xi)]\,\varrho(\xi)\cos(n,x_k)\,d\omega.$$

a nun

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[a_{ik}(x)\,\psi(x,\xi)] = -\frac{\partial}{\partial \xi_i}[a_{ik}(\xi)\,\psi(\xi,x)] + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

icht zu beweisen ist, so folgt

$$L(F) = -\int_S \left\{\sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_i}[a_{ik}(\xi)\,\psi(\xi,x)]\cos(n,x_k)\right\}\varrho(\xi)\,d\omega + J.$$

abei ist J (ebenso im folgenden J_1, J_2) ein Aggregat aus einem Flächenntegral, dessen Integrand $= O\left(\frac{1}{r}\right)$, und einem Raumintegral, dessen Integrand $= O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ ist. Man kann auch schreiben

$$L(F) = -\int_S \left\{\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}(\xi)\frac{\partial \psi(\xi,x)}{\partial \xi_i}\cos(n,x_k)\right\}\varrho(\xi)\,d\omega + J_1$$

$$= \int_S \varrho\,\delta(\psi)\,d\omega + J_1.$$

Die Greensche Formel (10) des § 2 ergibt aber, wenn (x) außerhalb liegt,

$$\int_T \left\{\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\frac{\partial \psi}{\partial \xi_i}\frac{\partial \varrho}{\partial \xi_k}\right\}d\tau = \int_S \varrho\,\delta(\psi)\,d\omega - \int_T \varrho L(\psi)\,d\tau$$

nd, wenn (x) innerhalb T liegt, mittels Grenzübergang und Benutzung on (16)

$$\int_T \left\{\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\frac{\partial \psi}{\partial \xi_i}\frac{\partial \varrho}{\partial \xi_k}\right\}d\tau = 4\pi E(x)\varrho(x) + \int_S \varrho\,\delta(\psi)\,d\omega - \int_T \varrho L(\psi)\,d\tau.$$

Wir erhalten also im ersten bzw. im zweiten Falle

$$L(F) = \int_T \varrho(\xi) L_\xi(\psi(\xi, x))\, d\tau + J_2,$$

$$L(F) = -4\pi E(x)\varrho(x) + \int_T \varrho(\xi) L_\xi(\psi(\xi, x))\, d\tau + J_2.$$

Durch den zu L hinzugefügten Index ξ ist angedeutet, daß nach $\xi, \eta,$ differentiiert wird.

Nun ist im ersten Falle, weil man $L(F)$ auch durch Differentiation unter dem Integral gewinnen kann,

$$\int_T \varrho(\xi) L_\xi(\psi(\xi, x))\, d\tau + J_2 = \int_T \varrho(\xi) L_x(\psi(x, \xi))\, d\tau.$$

Wir können aber den Schluß ziehen, daß diese Gleichung auch im zweiten Falle richtig bleibt. Denn Identitäten, welche die Umwandlung eines Raumintegrals in ein Oberflächenintegral betreffen, gelten ungeändert in beiden Fällen, wenn im Flächenintegral der Integrand $= O\left(\frac{1}{r}\right)$ ist. Dies erkennt man sofort, indem man die singuläre Stelle (x) zunächst durch eine kleine Kugel von der Integration ausschließt und dann mit dem Radius zur Grenze 0 übergeht, wobei das Integral über die kleine Kugelfläche unter der obigen Voraussetzung verschwindet. Im Falle, daß (x) ein innerer Punkt ist, haben wir also schließlich

$$(44) \qquad L(F(x)) = -4\pi E(x)\varrho(x) + \int_T \varrho(\xi) L_x(\psi(x, \xi))\, d\tau.$$

Ist die Funktion ϱ nebst Ableitungen erster Ordnung bloß stückweise stetig oder besitzt sie isolierte singuläre Stellen derart, daß die Integrale $\int_T \varrho\psi\, d\tau$ und $\int_T \varrho L_x(\psi)\, d\tau$ einen Sinn behalten, so gilt (44) mit Ausnahme der Unstetigkeitstellen. Zum Beweise braucht man, wenn (x) eine Stetigkeitsstelle von ϱ ist, nur die Zerlegung

$$F(x) = \int_{T_1} \psi\varrho\, d\tau + \int_{T_2} \psi\varrho\, d\tau$$

vorzunehmen, wo T_1 eine kleine keine Unstetigkeitsstelle enthaltende Umgebung von (x) und T_2 der übrige Teil von T ist. Für das erste Integral gilt dann (44), für das zweite ist (x) ein äußerer Punkt.

Die Formel (44) enthält den Nachweis[7]) für die Richtigkeit der zur Bestimmung von $f(x, \xi)$ dienenden Gleichung (30) oder (30_1).

---

[7]) Wir bemerken, daß die Integralgleichung für $f(x, \xi)$ im dreidimensionalen Fall von E. E. Levi nur angegeben, nicht explizite abgeleitet wird. E. E. Levi behandelt ausführlich den Fall von zwei Variablen, auch bei Gleichungen beliebiger Ordnung und faßt sich bei drei Variablen so kurz wie möglich.

Offenbar ist (44) etwas allgemeiner als (36), insofern als $\psi(x, \xi)$ einer Differentialgleichung wie $K(x, \xi)$ genügt, sondern nur die charakteristische Singularität besitzt. Wir kommen zu

$$U(x) = \int K(x, \xi)\varrho(\xi)\,d\tau = \int \psi(x, \xi)\frac{\varrho(\xi)}{E(\xi)}\,d\tau + \int W(x, \xi)\frac{\varrho(\xi)}{E(\xi)}\,d\tau,$$

$$L(U) = -4\pi E(x)\frac{\varrho(x)}{E(x)} + \int L(\psi)\frac{\varrho(\xi)}{E(\xi)}\,d\tau + \int L(W)\frac{\varrho(\xi)}{E(\xi)}\,d\tau$$

$$= -4\pi\varrho(x) + \int L(K)\varrho\,d\tau,$$

ithin

36) $$L(U) = -4\pi\varrho.$$

§ 6.

Unstetigkeitseigenschaften der Flächenintegrale.

Wir beschäftigen uns nun mit den Gleichungen (37) bis (42) des 4. Was (37) und (40) betrifft, so ist der Beweis fast ebenso wie in der otentialtheorie zu führen. Dagegen erfordern (38), (39), (41) und besonders (42) ein näheres Eingehen. Um zunächst (39) und (41) zu beeisen, formen wir $W(x) = \int_S \delta_\xi(K(\xi, x))\mu(\xi)\,d\omega$ um und berücksichgen, daß (x) auf der Normalen irgendeines Punktes s der Fläche S liegt nd auf dieser Normalen von innen oder von außen in s hineinrückt. Vir setzen

$$W(x) = \mu(s)\int_S \delta_\xi(K(\xi, x))\,d\omega + \int_S [\mu(\xi) - \mu(s)]\,\delta_\xi(K(\xi, x))\,d\omega$$

nd müssen zeigen, daß

$$W(x) - \mu(s)\int_S \delta(K)\,d\omega = \int_S [\mu(\xi) - \mu(s)]\,\delta(K)\,d\omega = f(x)$$

eim Durchgange von (x) durch s stetig bleibt. Ist dies bewiesen, so rgibt sich aus $f_i = f_s = f_a$ und (27) unmittelbar

$$W_i - 4\pi\mu_s = W_s - 2\pi\mu_s = W_a,$$

aher

45) $$W_i = 2\pi\mu_s + W_s,$$

46) $$W_a = -2\pi\mu_s + W_s,$$

oraus, wenn man die Indizes i und a durch 1 und 2 ersetzt, neben (39) uch (41) folgt.

Beim Nachweise der Stetigkeit von

$$f(x) = \frac{1}{E(x)}\int_S [\mu(\xi) - \mu(s)]\,\delta_\xi(\Gamma(\xi, x))\,d\omega$$

ist zu bedenken, daß nach (19) offenbar

$$\delta_\xi(\Gamma(\xi, x)) = \frac{r\cos(r, n_\xi)}{\sigma^{\frac{3}{2}}(\xi, x)} + R(x, \xi)$$

gesetzt werden kann, wo $R(x, \xi) = O\left(\frac{1}{r}\right)$ ist. Da $\frac{1}{E(x)}$ stetig ist, kommt es also auf die Stetigkeit von

$$A(x) = \int_S [\mu(\xi) - \mu(s)] \frac{r\cos(r, n_\xi)}{\sigma^{\frac{3}{2}}(\xi, x)}$$

und

$$B(x) = \int_S [\mu(\xi) - \mu(s)] R(x, \xi)\, d\omega$$

in s an. Von hier an ist der Beweis wieder ähnlich wie in der Potentialtheorie[8]), wenn man berücksichtigt, daß $\int_S \frac{r\,|\cos(r, n)|}{\sigma^{\frac{3}{2}}} d\omega$ ebenso wie $\int_S \frac{|\cos(r, n)|}{r^2} d\omega$ unter einer von (x) unabhängigen Schranke liegt. Wenn μ bloß abteilungsweise stetig ist, gelten (45) und (46) für alle Stetigkeitsstellen von μ.

Wir können zum Nachweis von (38) und (42) übergehen. Bei der Funktion $V(x) = \int_S K(x, \xi)\varkappa(\xi)\, d\omega$ kann die Differentiation unter dem Integralzeichen ausgeführt werden, solange der Punkt (x), welcher sich auf der Normalen n_s von s bewegt, außerhalb von s liegt. Alsdann erhalten wir

$$\delta(V) = \int_S \varkappa(\xi)\, \delta_x(K(x, \xi))\, d\omega.$$

Wir setzen nun

$$\delta_x(K(x, \xi)) = -\delta_\xi(K(x, \xi)) + Q(x, \xi), \tag{47}$$

$$\delta(V) = -\int_S \varkappa(\xi)\delta_\xi(K(x, \xi))\, d\omega + \int_S \varkappa(\xi) Q(x, \xi)\, d\omega = -W(x) + C(x) \tag{48}$$

Es stimmt $W(x)$ mit dem Potential einer Doppelbelegung vom Typus (35) überein, die Dichte ist hier $\varkappa(\xi)$ statt $\mu(\xi)$. Vom Integral $C(x)$ werden wir beweisen, daß es sich wie das Potential einer einfachen Belegung verhält und beim Durchgange von (x) durch die Fläche S stetig bleibt. Wir werden also die Gleichungen $C_i = C_s = C_a$ und $W_i = 2\pi\varkappa_s + W_s$, $W_a = -2\pi\varkappa_s + W_s$ haben, folglich

$$\delta_i(V) = -2\pi\varkappa_s - W_s + C_s, \qquad \delta_a(V) = 2\pi\varkappa_s - W_s + C_s.$$

[8]) Vgl. Horn, „Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen", Leipzig (1910), S. 289ff. S. a. Plemelj, l. c. § 10, insbes. S. 22 und 23.

Es ist aber

$$-W_s + C_s = -\int_S \varkappa(\xi)\,\delta_\xi(K(s,\xi))\,d\omega + \int_S \varkappa(\xi)\,Q(s,\xi)\,d\omega$$

$$= \int_S \varkappa(\xi)\,\delta_s(K(s,\xi))\,d\omega,$$

daher

$$\delta_i(V) = -2\pi\varkappa_s + \int_S \varkappa(\xi)\,\delta_s(K(s,\xi))\,d\omega, \tag{49}$$

$$\delta_a(V) = 2\pi\varkappa_s + \int_S \varkappa(\xi)\,\delta_s(K(s,\xi))\,d\omega, \tag{50}$$

vorausman in der Tat neben (38) auch (42) gewinnt.

Der Beweis der Stetigkeit von $C(x)$ beruht auf der Abschätzung

$$Q(x,\xi) = O\left(\frac{1}{r_{x\xi}}\right). \tag{51}$$

Ebenso kann ja auch die Stetigkeit des Potentials einer einfachen Belegung $V(x) = \int_S \varkappa(\xi) K(x,\xi)\,d\omega$ lediglich auf Grund der Abschätzung $K(x,\xi) = O\left(\frac{1}{r}\right)$ nachgewiesen werden. Um (51) zu erhalten, verfahren wir folgendermaßen, wobei wir darauf hinweisen, daß unsere Abschätzungen für die beiden Fälle gelten, daß (x) auf n_s außerhalb s liegt und daß (x) mit s zusammenfällt. Wir schreiben

$$Q(x,\xi) = \delta_x(K(x,\xi)) + \delta_\xi(K(\xi,x))$$

$$= \frac{1}{E(\xi)}\,\delta_x(\psi(x,\xi)) + \frac{1}{E(x)}\,\delta_\xi(\psi(\xi,x)) + O\left(\frac{1}{r_{x\xi}}\right).$$

Es ist aber nach (19)

$$\frac{1}{E(\xi)}\,\delta_x(\psi(x,\xi)) = \frac{1}{E(\xi)}\,\frac{r\cos(r,n_s)}{\sigma^{\frac{3}{2}}(x,\xi)} + O\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{E(x)}\,\frac{r\cos(r,n_s)}{\sigma^{\frac{3}{2}}(\xi,x)} + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{1}{E(x)}\,\delta_\xi(\psi(\xi,x)) = \frac{1}{E(x)}\,\frac{r\cos(r,n_\xi)}{\sigma^{\frac{3}{2}}(\xi,x)} + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Was $\cos(r,n_s)$ betrifft, so ist r hier in der Richtung von (x) nach (ξ) zu nehmen, bei $\cos(r,n_\xi)$ umgekehrt von (ξ) nach (x). Wir wollen aber auch bei $\cos(r,n_\xi)$ jetzt die erstere Richtung einführen, so daß sich das Vorzeichen umkehrt. Dann folgt

$$Q(x,\xi) = \frac{1}{E(x)}\,\frac{r_{x\xi}}{\sigma^{\frac{3}{2}}(\xi,x)}\,[\cos(r_{x\xi},n_s) - \cos(r_{x\xi},n_\xi)] + O\left(\frac{1}{r_{x\xi}}\right). \tag{52}$$

Wegen $\sigma(\xi,x) = O(r_{x\xi}^2)$ ist also nun noch zu beweisen

$$\cos(r_{x\xi},n_s) - \cos(r_{x\xi},n_\xi) = O(r_{x\xi}). \tag{53}$$

Diese Gleichung geht, wenn (x) mit s zusammenfällt, über in

$$\cos(r_{s\xi}, n_s) - \cos(r_{s\xi}, n_\xi) = O(r_{s\xi}). \tag{54}$$

Liegt (x) außerhalb S, so ist $r_{s\xi}/r_{x\xi} = \sin(s\,x\,\xi)/\sin(x\,s\,\xi)$. Man kann aber für alle in einer genügend kleinen Umgebung von s gelegenen Punkte (ξ) etwa $\sin(x\,s\,\xi) > \frac{1}{2}$ annehmen. Man hat daher $r_{s\xi} < 2\,r_{x\xi}$. Es genügt also, auch wenn (x) außerhalb S liegt, (54) zu beweisen, wo dann bloß auf der linken Seite $r_{s\xi}$ durch $r_{x\xi}$ zu ersetzen ist. Beim Beweise von (54) benutzen wir wie in der Potentialtheorie die Voraussetzung der stetigen Krümmung von S. Schreiben wir zur Abkürzung $\angle(r, n_s) = \alpha$, $\angle(r, n_\xi) = \beta$, so ist, mag (x) außerhalb S liegen oder mit s zusammenfallen,

$$\cos(r, n_s) - \cos(r, n_\xi) = \cos\alpha - \cos\beta = -\,2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$|\cos(r, n_s) - \cos(r, n_\xi)| \leqq 2\sin\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right| = O(\sin|\alpha-\beta|).$$

Zieht man durch (ξ) noch die Parallele zur Normale n_s, so entsteht bei (ξ) eine dreiseitige Ecke, und die Differenz der beiden Kantenwinkel, $|\alpha-\beta|$, ist kleiner als der dritte Kantenwinkel $\angle(n_s, n_\xi) = \vartheta$. Demnach wird

$$|\cos(r, n_s) - \cos(r, n_\xi)| = O(\sin\vartheta).$$

Um schließlich $\sin\vartheta = O(r_{s\xi})$ zu beweisen, führen wir ein neues Koordinatensystem ein mit s als Anfangspunkt, n_s als Z-Achse und dem Schnitt der Tangentialebene in s und der Ebene durch ξ und n_s als X-Achse. Die Gleichung von S sei $z = z(x, y)$. Wegen der Stetigkeit der Krümmung existieren stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung. In s ist $x = y = z = 0$ und $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Offenbar ist der dritte Richtungskosinus der Flächennormalen n_ξ

$$\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}},$$

also

$$\sin\vartheta \leqq \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Die Taylorsche Formel liefert die in der Umgebung von s gültige Darstellung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\theta x, \theta y) + y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(\theta x, \theta y) \qquad (0 < \theta < 1),$$

daher

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < C(|x| + |y|) < 2\,C\,r_{s\xi},$$

o C eine endliche Größe ist, d. h.

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| = O(r_{s\xi}), \quad \text{ebenso} \quad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| = O(r_{s\xi}), \quad \text{mithin} \quad \sin\vartheta = O(r_{s\xi}),$$

omit alles bewiesen ist. Ist $\varkappa$ auf S bloß abteilungsweise stetig, so elten (49) und (50) für die Stetigkeitsstellen von $\varkappa$.

§ 7.

Lösung der ersten Randwertaufgabe.

Wir wollen jetzt die Existenz einer in $T+S$ beschränkten, in T egulären Lösung W der Gleichung (1) nachweisen, die auf S, wenn $f(s)$ ne gegebene abteilungsweise stetige Funktion des Ortes ist, in den Stetigeitsstellen von $f(s)$ die Werte $W = f(s)$ annimmt. Hierzu machen wir en Ansatz

$$W(x) = \int_S \delta_\xi (K(x,\xi))\, \mu(\xi)\, d\omega$$

nd bestimmen μ so, daß die Funktion W, die ja (1) genügt, auch die andbedingung erfüllt. Es ist nach (45)

$$W_i = 2\pi\mu(s) + \int_S \delta_\xi (K(s,\xi))\, \mu(\xi)\, d\omega = f(s). \tag{55}$$

as ist eine inhomogene Integralgleichung zur Bestimmung von μ. Die heorie von Fredholm liefert die Existenz und Eindeutigkeit der Lönng μ, wenn gezeigt ist, daß die zugehörige homogene Gleichung keine ösung besitzt. Es möge im Gegensatz hierzu die homogene Gleichung

$$2\pi\mu(s) + \int_S \delta_\xi (K(s,\xi))\, \mu(\xi)\, d\omega = 0$$

ne Lösung μ haben. Wir bilden mit dieser den Ausdruck $W(x) = \int_S \delta_\xi(K)\,\mu\, d\omega$, ir welchen $W_i = 0$ wäre. Dann müßte, wie in § 2 im Anschluß an (11) ezeigt wurde, in ganz T die Identität $W = 0$ gelten. Daher wäre $\delta_i(W) = 0$, ithin wegen (40) auch $\delta_a(W) = 0$. Es würde also auch im ganzen ußenraum von S identisch $W = 0$ sein, wie im Anschluß an (11*) beiesen war. Demnach hätte man auch $W_a = 0$. Aus $W_i - W_a = 4\pi\mu$ ürde schließlich $\mu = 0$ folgen. Die homogene Gleichung hat also außer er trivialen Lösung Null keine Lösung, w. z. b. w.[9])

Wir kommen jetzt zu der allgemeinen inhomogenen Differentialeichung

$$D(u) \equiv \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} + \sum_{i=1}^{3} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c\,u = d \tag{56}$$

[9]) Vgl. J. Plemelj, l. c. S. 40ff., wo sich analoge Betrachtungen in der Theorie r Gleichung $\Delta u = 0$ finden.

mit der Randbedingung $u = f(s)$ auf S. Die b_i, c und d mögen nebst ihren ersten Ableitungen in $T+S$ stetig sein; $f(s)$ sei auf S abteilungsweise stetig. Es kann etwa

$$(56_1) \qquad D(u) \equiv L(u) + \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = d$$

geschrieben werden. Wir nehmen an, es gebe eine in T reguläre, in $T+S$ beschränkte Lösung der Randwertaufgabe, und zeigen, daß diese einer gewissen Integralgleichung genügen muß. Sei v die der Randbedingung $v = f(s)$ genügende Lösung von (1). Ihre Existenz wurde oben bewiesen. Damit ist bekanntlich auch die Existenz einer auf S verschwindenden Grundlösung von (1), d. h. der Greenschen Funktion $G(x, \xi)$, gesichert. Wie in der Potentialtheorie ergibt sich leicht, daß in T überall $G > 0$ und daß auf jeder Fläche $G = \text{konst.}$ ständig $\delta(G) > 0$ ist. Nun wenden wir die Greensche Formel auf die Funktionen $u - v = w$ und G an. Das Integrationsgebiet T' sei von einer Fläche S' begrenzt, auf der $G = \text{konst.} = \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ ist. Dann werden wir den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ vornehmen. Wir erhalten

$$\int_{T'} \{G\,L(w) - w\,L(G)\}\,d\tau = -4\pi w + \int_{S'} \{G\,\delta(w) - w\,\delta(G)\}\,d\omega$$

$$= \int_{T'} G\Big[\sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} + Cu - d\Big]\,d\tau$$

$$= \int_{T'} u\Big[GC - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_i}(B_i G)\Big]\,d\tau + \int_{S'} Gu\Big[\sum_{i=1}^{3} B_i \cos(n, x_i)\Big]\,d\omega - \int_{T'} dG\,d\tau$$

oder

$$4\pi(u-v) = \int_{T'} u\Big[GC - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_i}(GB_i)\Big]\,d\tau - \int_{T'} dG\,d\tau - \varepsilon \int_{S'} u\Big[\sum_{i=1}^{3} B_i \cos(n, x_i)\Big]\,d$$

$$+ \varepsilon \int_{S'} \delta(v)\,d\omega - \varepsilon \int_{S'} \delta(u)\,d\omega - \int_{S'} w\,\delta(G)\,d\omega = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6.$$

Offenbar ist

$$\lim_{\varepsilon=0} J_2 = -\int_{T} dG\,d\tau, \qquad \lim_{\varepsilon=0} J_3 = 0, \qquad J_4 = 0 \quad \text{wegen } (10_2).$$

Wegen (10_1) hat man

$$\int_{S'} \delta(u)\,d\omega = \int_{T'} L(u)\,d\tau = -\int_{T'} \Big(\sum_i B_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i}\Big)\,d\tau - \int_{T'} (Cu - d)\,d\tau$$

$$= -\int_{S'} u\Big(\sum_i B_i \cos(n, x_i)\Big)\,d\omega + \int_{T'} \Big\{u\Big(\sum_i \frac{\partial B_i}{\partial \xi_i} - C\Big) + d\Big\}\,d\tau$$

Demnach existiert der endliche Grenzwert $\lim_{S' \to S} \int_{S'} \delta(u)\, d\omega$, so daß $\lim_{\varepsilon=0} J_5 = 0$ wird. Schließlich findet man, wenn $\eta = \mathrm{Max}\,|w|$ auf S' ist, wegen (27)

$$|J_6| \leqq \eta \int_{S'} |\delta(G)|\, d\omega = \eta \int_{S'} \delta(G)\, d\omega = 4\pi\eta .$$

Da aber $\lim_{\varepsilon=0} \eta = 0$ ist, so folgt $\lim_{\varepsilon=0} J_6 = 0$. Nun muß auch $\lim_{\varepsilon=0} J_1$ existieren, und wir bekommen die gesuchte Integralgleichung

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_T \Big\{ GC - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_i}(GB_i) \Big\}\, u\, d\tau - \frac{1}{4\pi} \int_T dG\, d\tau + v(x) . \tag{57}$$

Umgekehrt läßt sich leicht zeigen, daß jede Lösung von (57) eine reguläre Lösung unserer Randwertaufgabe ist. Die Fredholmsche Theorie liefert also das Resultat: Entweder hat die vorgelegte Randwertaufgabe eine und nur eine reguläre Lösung, oder das homogene Problem $D(u) = 0$ in T, $u = 0$ auf S hat eine endliche Anzahl linear unabhängiger, in T regulärer Lösungen. Das inhomogene Problem ist dann nur lösbar, wenn die Funktion $v - \int_T dG\, d\tau$ gewisse Integralbedingungen erfüllt [10]).

§ 8.

Lösung der zweiten Randwertaufgabe.

Es ist die Existenz einer in T regulären Lösung V von (1) zu beweisen, welche auf S die Bedingung

$$\delta(V) = f(s) \tag{58}$$

erfüllt, wo $f(s)$ eine gegebene abteilungsweise stetige Funktion des Ortes auf S ist. Es soll also $\delta(V)$ bei Annäherung an S von innen her gegen $f(s)$ konvergieren (natürlich mit Ausschluß der Linien, in denen f Sprünge macht). Wir bilden den Ausdruck

$$V(x) = \int_S K(x, \xi)\, \varkappa(\xi)\, d\omega$$

und suchen $\varkappa$ entsprechend (58) zu bestimmen. Dann erhalten wir

$$\delta_i(V) = -2\pi\varkappa(s) + \int_S \varkappa(\xi)\, \delta_s(K(s, \xi))\, d\omega = f(s) .$$

Schreiben wir zur Abkürzung

$$\delta_\xi(K(s, \xi)) = Q(s, \xi), \qquad \text{also} \qquad \delta_s(K(s, \xi)) = Q(\xi, s),$$

[10]) Vgl. L. Lichtenstein, Journ. f. Math. **142** (1913), S. 1–40, insb. S. 3–8; Acta Mathematica **142** (1913), S. 345–386, insb. S. 347–367. Dort finden sich analoge Betrachtungen bei Behandlung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f .$$

so wird

$$\delta_i(V) = -2\pi\varkappa(s) + \int_S \varkappa(\xi)\, Q(\xi, s)\, d\omega = f(s) \tag{59}$$

die inhomogene Gleichung zur Bestimmung von $\varkappa$. Hier hat nun die zugehörige homogene Gleichung eine Lösung. Untersuchen wir zuerst die homogene Gleichung

$$-2\pi\varkappa(s) + \int_S \varkappa(\xi)\, Q(s, \xi)\, d\omega = 0\,. \tag{60}$$

Sie hat die Lösung $\varkappa = \text{konst.} = 1$. Es ist nämlich nach (27)

$$\int_S Q(s, \xi)\, d\omega = 2\pi\,.$$

Andere Lösungen von (60) sind nicht vorhanden. Sei in der Tat $\varkappa$ irgendeine Lösung. Mit dieser bilden wir das Integral

$$W(x) = \int_S \varkappa(\xi)\, \delta_\xi(K(s, \xi))\, d\omega\,.$$

Es gilt dann

$$W_a = -2\pi\varkappa(s) + \int_S \varkappa(\xi)\, Q(s, \xi)\, d\omega = 0\,.$$

Mithin ist außerhalb S identisch $W = 0$, folglich $\delta_a(W) = 0$, daher auch $\delta_i(W) = 0$. Demnach ist innerhalb S identisch $W = \text{konst.}$, also $W_i = \text{konst.}$ Schließlich ergibt sich

$$4\pi\varkappa = W_i - W_a = \text{konst.},$$

w. z. b. w.

Ebenso wie (60) hat auch die zu (59) gehörige Gleichung

$$-2\pi\varkappa(s) + \int_S \varkappa(\xi)\, Q(\xi, s)\, d\omega = 0 \tag{60_1}$$

eine und, abgesehen von einem konstanten Faktor, nur eine Lösung. Für die Existenz einer Lösung von (59) ist notwendig und hinreichend, daß $f(s)$ zu der Lösung 1 von (60) orthogonal ist, d. h. der Bedingung genügt

$$\int_S f\, d\omega = 0\,. \tag{61}$$

Dies ist nichts anderes als die Gleichung (10_2) des § 2.

Wir nehmen also (61) als erfüllt an. Nun hat (59) eine Lösung $\varkappa$, und diese liefert eine Lösung der Randwertaufgabe. Die allgemeinste Lösung der letzteren gewinnt man durch Hinzufügung einer willkürlichen Konstanten in der Form

$$V(x) = \int_S K(x, \xi)\, \varkappa(\xi)\, d\omega + \text{konst.}\ ^{11})$$

Mit denselben Methoden wie die Gleichung (1) kann auch die Differentialgleichung

$$M(u) \equiv L(u) + q\,u = 0 \tag{62}$$

[11]) Vgl. J. Plemelj, l. c. dritter Abschnitt, wo sich analoge Betrachtungen in der Theorie der Gleichung $\Delta u = 0$ finden.

behandelt werden, wenn q in $T+S$ stetig ist. Ist q ständig negativ, so existiert stets eine und nur eine in T reguläre Lösung der zweiten Randwertaufgabe. Hier hat nämlich das homogene Problem, wo $\delta(u)=0$ auf S vorgeschrieben ist, keine Lösung außer der trivialen $u=0$, was man leicht unter Benutzung von (10) beweist.

Die Lösung der zweiten Randwertaufgabe für die allgemeine Differentialgleichung (56) wollen wir noch kurz skizzieren. Wir nehmen zunächst an, es gebe eine in T reguläre, in $T+S$ beschränkte Lösung von (56), welche auf S der Bedingung $\delta(u)=f(s)$ genügt. Sei v die derselben Randbedingung genügende Lösung von (62) $M(v)=0$, $G^{II}(x,\xi)$ die zugehörige Greensche Funktion. Die Anwendung der Greenschen Formel gibt

$$u=v-\frac{1}{4\pi}\int_T G^{II}M(u)\,d\tau. \tag{63}$$

Setzt man

$$U=M(u)=-\sum_{i=1}^{3}B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}-(C-q)\,u+d,$$

so folgt

$$U(x)=\frac{1}{4\pi}\int_T\left\{\sum_{i=1}^{3}B_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}G^{II}(x,\xi)+(C(x)-q(x))\,G^{II}(x,\xi)\right\}U(\xi)\,d\tau+h(x),$$

wenn zur Abkürzung

$$h=-\sum_{i=1}^{3}B_i\frac{\partial v}{\partial x_i}-(C-q)\,v+d$$

geschrieben wird.

Die obige Integralgleichung dient zur Bestimmung von U. Sie möge etwa eine einzige Lösung haben. Dann findet man u durch (63), und es läßt sich leicht zeigen, daß die so gewonnene Funktion wirklich eine Lösung des Problems ist. Hat andererseits die homogene Integralgleichung, welche aus (64) durch Weglassen von $h(x)$ entsteht, eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen, so führen diese zu ebensovielen regulären Lösungen der homogenen Randwertaufgabe: $D(u)=0$ in T, $\delta(u)=0$ auf S. Das inhomogene Randwertproblem besitzt dann im allgemeinen keine Lösung [12]).

[12]) Die im Vorstehenden gegebene Auflösung der zweiten Randwertaufgabe der Differentialgleichung (56) stellt eine Übertragung der von Herrn Lichtenstein entwickelten Behandlung des zweiten Randwertproblems der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f$$

dar. Vgl. L. Lichtenstein, Math. Zeitschr. **20** (1924), S. 194–212, insb. S. 195–197.

(Eingegangen am 15. April 1924.)

Zum natürlichen Dimensionsbegriff.

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

In meiner 1913 erschienenen Arbeit: „*Über den natürlichen Dimensionsbegriff*“ (Journ. f. Math. **142**, S. 146—152), in welcher ich dem Poincaréschen rekurrenten Dimensionsbegriff die erforderliche mengentheoretische Grundlage gegeben habe, ist in der auf S. 147 befindlichen „*natürlichen*“ *Trennungsdefinition*:

a) *ϱ und ϱ' heißen in π durch π_1 getrennt, wenn jede zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge von π, welche sowohl mit ϱ wie mit ϱ' Punkte gemeinsam hat, auch von π_1 mindestens einen Punkt enthält,*

wie in der anschließenden Beweisführung, insbesondere in Fußnote *) auf S. 150 in Verbindung mit dem zugehörigen Passus des Textes und dem Wortlaute des auf derselben Seite befindlichen Hilfssatzes aufs zwingendste zum Ausdruck kommt, das Wort „*abgeschlossene*“ zu streichen, womit also die Definition folgende Form erhält:

b) *ϱ und ϱ' heißen in π durch π_1 getrennt, wenn jede zusammenhängende Teilmenge von π, welche sowohl mit ϱ wie mit ϱ' Punkte gemeinsam hat, auch von π_1 mindestens einen Punkt enthält.*

Die Veröffentlichung dieser (übrigens für den Leser auf Grund des Zusammenhanges auf der Hand liegenden) Berichtigung scheint vor elf Jahren dadurch unterblieben zu sein, daß ich im Anschluß an die damals in Aussicht gestellten (a. a. O. S. 151 in einer Fußnote beiläufig berührten) näheren Ausführungen Lebesgues auf die Dimensionstheorie zurückzukommen und dann gleichzeitig den betreffenden Schreibfehler richtigzustellen beabsich-

igte, daß aber, als diese Ausführungen Lebesgues Jahr aus Jahr ein auf ich warten ließen und meine Aufmerksamkeit von anderen Gegenständen n Anspruch genommen wurde, die Angelegenheit in Vergessenheit geraten st. Erst anläßlich eines im vorigen Jahre auf der Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Marburg von Herrn P. Urysohn ehaltenen Vortrags, in welchem auf die a. a. O. zu hebende Unstimmigkeit ingewiesen wurde, hat neuerdings in den Amsterdamer Proceedings **26**, . 796, sowie im Journ. f. Math. **153** die Richtigstellung stattgefunden, wobei er Trennungsdefinition der folgende, mit der obigen Form b) äquivalente, veniger anschauliche, aber üblichere und sich an die Beweisführung enger nschließende Wortlaut gegeben wurde:

c) *ϱ und ϱ' heißen in π durch π_1 getrennt, wenn π_1 in π eine ϱ enthaltende, aber ϱ' nicht enthaltende Gebietsmenge bestimmt.*

Aus dem obigen folgt indes keineswegs, daß die obige Trennungsdefinition a) für die abstrakte Dimensionstheorie unbrauchbar wäre. Im Gegenteil, auch auf der Grundlage dieser Definition läßt sich von meinem zitierten Aufsatz: „*Über den natürlichen Dimensionsbegriff*“ der ganze Text aufrecht erhalten, wenn der a. a. O. zwischen S. 149 Z. 2 v. u. und S. 150 Z. 10 v. u. enthaltene Passus wie folgt geändert wird:

„... bezeichnen wir mit τ das Ausgangselement $E_1 E_2 E_3 \dots E_{n+1}$, für jedes ν mit τ_ν den zu τ gehörigen Teil von π_ν, konstruieren in τ eine simpliziale Zerlegung ζ von der Dichte ε, setzen $\gamma_0 = \tau$, und wählen für jedes ν, nachdem $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\nu$ bestimmt sind, für $\gamma_{\nu+1}$ eine solche Vereinigung von zu γ_ν gehörigen Grundsimplexen von ζ, daß *erstens* die zu den Elementseiten $E_1 E_2 \dots E_{\nu+1}$ und $E_1 \dots E_\nu E_{\nu+2} \dots E_{n+1}$ gehörigen Teile von γ_ν in γ_ν durch $\gamma_{\nu+1}$ getrennt sind, *zweitens* falls $\tau_{\nu+1}$ existiert, $\gamma_{\nu+1}$ für passend gewähltes positives $\varepsilon_{\nu+1}$ besteht aus denjenigen zu γ_ν gehörigen Grundsimplexen von ζ, welche einen Abstand $\leqq \varepsilon_{\nu+1}$ von $\tau_{\nu+1}$ besitzen. *Alsdann können wir $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ alle mit ε gegen Null konvergieren lassen.*

Nehmen wir nämlich einen Augenblick an, daß wir $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\nu$ zusammen gegen Null konvergieren lassen können, während für $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\nu, \varepsilon_{\nu+1}$ dasselbe unmöglich ist, so läßt sich eine positive Größe a angeben mit der Eigenschaft, daß für jedes positive η in τ_ν in einer Entfernung $> a$ von $\tau_{\nu+1}$ eine η-Kette existiert, von deren Endpunkten das eine in einer Entfernung $< \eta$ von $E_1 E_2 \dots E_\nu E_{\nu+1}$ und das andere in einer Entfernung $< \eta$ von $E_1 \dots E_\nu E_{\nu+2} \dots E_{n+1}$ gelegen ist. Dann aber müßte in τ_ν in einer Entfernung $\geqq a$ von $\tau_{\nu+1}$ ein sowohl $E_1 \dots E_\nu E_{\nu+1}$ wie $E_1 \dots E_\nu E_{\nu+2} \dots E_{n+1}$ treffendes abgeschlossenes Kontinuum existieren, was ungereimt ist.

Weil wir also $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ in der Tat alle zusammen gegen Null konvergieren lassen können, so können wir, falls τ_{ν_1} verschwindet, dafür sorgen, daß auch γ_{ν_1} verschwindet. Der Dimensionssatz ist hiermit zurückgeführt auf den Nachweis der Eigenschaft, daß γ_{ν_1} für $\nu_1 \leqq n$ unmöglich verschwinden kann, und hiermit auf den Beweis von folgendem

Hilfssatz. Es sei σ ein simplizial zerlegtes n-dimensionales Element mit den Eckpunkten $E_1, E_2, \ldots, E_{n+1}$; ...“

(Eingegangen am 16. Juni 1924.)

Beweis eines Satzes von Bézout.

Von

Oskar Perron in München.

In der Bézoutschen Eliminationstheorie spielt der folgende Satz eine ichtige Rolle:

„Sind

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_k) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

allgemeine[1]) Polynome vom Grad $n_1, \ldots, n_k$ der Variablen $x_1, \ldots, x_k$, nd ist

$$F(x_1, \ldots, x_k) = \sum_\lambda A_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_k^{\lambda_k}$$

gendein Polynom dieser selben Variablen, so gibt es k Polynome

$$V_\nu(x_1, \ldots, x_k) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

it Koeffizienten aus dem durch die Koeffizienten der Polynome $f_1, \ldots, f_k, F$ estimmten Körper und so beschaffen, daß das Polynom

$$F - f_1 V_1 - \ldots - f_k V_k$$

bezug auf jede Variable x_ν höchstens vom Grad $n_\nu - 1$ ist."

Der exakte Beweis dieses Satzes bereitet eigentümliche Schwierigiten, auf die zuerst Carl Schmidt aufmerksam gemacht hat, und die ch in Nettos Algebra eingehend gewürdigt sind[2]). Außerdem waren iher noch umständliche Vorbereitungen aus der Kombinatorik erforderh, die erst im Jahre 1912 ein Beweis von Giudice vermieden hat[3]).

---

[1]) Das soll heißen: Die Polynome enthalten alle mit dem angegebenen Grad rträglichen Glieder, und die Koeffizienten sind „Unbestimmte".

[2]) Carl Schmidt, Zur Theorie der Elimination, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **31** 886), S. 214—222; E. Netto, Vorlesungen über Algebra 2, Leipzig 1900, § 410. Das eorem selbst steht in § 420.

[3]) F. Giudice, Lemma per il metodo d' eliminazione di Bézout, Reale Istituto mbardo di scienze e lettere, Rendiconti, (2), **45**, S. 162—166.

Der Satz kann aber noch auf wesentlich kürzere Art bewiesen werden. Das gegebene Polynom

$$F(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\lambda} A_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_k^{\lambda_k} \tag{1}$$

sei vom Grad N, also

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k \leqq N. \tag{2}$$

Wenn nun $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ irgendein System von ganzen nicht negativen Zahlen ist, die dieser Ungleichung genügen, so bezeichnen wir mit q_ν, r_ν Quotient und Rest, die sich ergeben, wenn λ_ν durch n_ν dividiert wird; es ist demgemäß

$$\lambda_\nu = q_\nu n_\nu + r_\nu \qquad (0 \leqq r_\nu \leqq n_\nu - 1). \tag{3}$$

Jetzt machen wir den Ansatz

$$F \equiv \sum_{\lambda} A_{\lambda_1 \ldots \lambda_k} x_1^{\lambda_1} \ldots x_k^{\lambda_k} = \sum_{\lambda} C_{\lambda_1 \ldots \lambda_k} f_1^{q_1} x_1^{r_1} \ldots f_k^{q_k} x_k^{r_k}. \tag{4}$$

Wenn sich die Koeffizienten $C_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}$ innerhalb des oben verlangten Körpers so bestimmen lassen, daß diese Gleichung in $x_1, \ldots, x_k$ identisch besteht, so ist die Aufgabe gelöst; man braucht ja dann nur diejenigen Glieder der rechten Seite, die (mindestens) einen der Faktoren $f_1, \ldots, f_k$ enthalten, bei denen also (mindestens) ein q_ν von Null verschieden ist, nach links zu nehmen; der Rest hat die verlangte Form.

Nun liefert, wenn q die Anzahl der Systeme λ ist, welche der Forderung (2) Genüge leisten[4]), das identische Bestehen der Gleichung (4) genau q lineare Bedingungsgleichungen für die q Koeffizienten $C_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}$, und es muß nur gezeigt werden, daß die Determinante nicht verschwindet. Diese Determinante ist eine ganze rationale Funktion der Koeffizienten von $f_1, \ldots, f_k$, und ihr Nichtverschwinden bei *unbestimmten* Koeffizienten wird erwiesen sein, sobald sie für gewisse *spezielle* Koeffizienten nicht verschwindet. Spezialisiert man aber: $f_\nu = x_\nu^{n_\nu}$, so geht (4) wegen (3) über in:

$$\sum_{\lambda} A_{\lambda_1 \ldots \lambda_k} x_1^{\lambda_1} \ldots x_k^{\lambda_k} = \sum_{\lambda} C_{\lambda_1 \ldots \lambda_k} x_1^{\lambda_1} \ldots x_k^{\lambda_k}.$$

Die Bedingungsgleichungen für die unbekannten Koeffizienten $C_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}$ lauten also einfach:

$$C_{\lambda_1 \ldots \lambda_k} = A_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}.$$

Sie haben schon die aufgelöste Form; die Determinante ist 1.

---

[4]) Natürlich ist $q = \binom{N+k}{k}$, was wir aber nicht zu wissen brauchen.

(Eingegangen am 30. Juni 1924.)

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Soeben erschien:

Vorlesungen über Differenzenrechnung

Von

Niels Erik Nörlund

ord. Professor der Mathematik an der Universität Kopenhagen

560 Seiten mit 54 Textfiguren

24 Goldmark; gebunden 25.20 Goldmark / 5.75 Dollar; gebunden 6 Dollar

(Band XIII der Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Gemeinsam mit W. Blaschke-Hamburg, M. Born-Göttingen, C. Runge-Göttingen herausgegeben von R. Courant-Göttingen.)

Inhaltsübersicht:

Erstes Kapitel: **Grundbegriffe.** — Zweites Kapitel: **Die Bernoullischen und Eulerschen Polynome.** — Drittes Kapitel: **Die Summe einer gegebenen Funktion.** — Viertes Kapitel: **Die Hauptlösungen im komplexen Gebiet.** — Fünftes Kapitel: **Die Gammafunktion und verwandte Funktionen.** — Sechstes Kapitel: **Die höheren Bernoullischen und Eulerschen Polynome.** — Siebentes Kapitel: **Mehrfache Summen.** — Achtes Kapitel: **Interpolationsreihen.** — Neuntes Kapitel: **Fakultätenreihen.** — Zehntes Kapitel: **Allgemeines über homogene lineare Differenzengleichungen.** — Elftes Kapitel: **Homogene lineare Differenzengleichungen mit rationalen Koeffizienten.** — Zwölftes Kapitel: **Homogene lineare Differenzengleichungen, deren Koeffizienten sich mit Hilfe von Fakultätenreihen ausdrücken lassen.** — Dreizehntes Kapitel: **Die Untersuchungen von Birkhoff.** — Vierzehntes Kapitel: **Vollständige lineare Differenzengleichungen.** — Fünfzehntes Kapitel: **Reziproke Differenzen und Kettenbrüche.** — Tafeln. — Literaturverzeichnis. — Namen- und Sachverzeichnis.

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik werden wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften veröffentlichen, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

R. Freter, Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen. Erster Teil. Mit 16 Figuren im Text. VI + 142 S. 8°. Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig, Berlin. 1924. B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band XLI, 1.

H. Jeffreys, The Earth. Its origin, history and physical constitution. XII + 278 S. 4°. Cambridge at the University press. 1924.

G. H. Hardy, Orders of infinity. The „Infinitärcalcül" of Paul du Bois-Reymond. Second edition. IV + 77 S. 8°. Cambridge, Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. Nr. 12. Cambridge University Press. London. Fetter, Lane, E, C. 4. 1924.

Louis V. King, On the direct numerical calculation of elliptic functions and integrals. VIII + 42 S. 8°. Cambridge. At the University Press. 1924.

R. Baldus, Formalismus and Intuitionismus in der Mathematik. 45 S. 8°. Verlegt bei G. Braun, Karlsruhe in Baden. 1924. Sammlung Wissen und Wirken.

K. Boehm, Begriffsbildung. 46 S. 8°. Verlegt bei G. Braun, Karlsruhe in Baden. 1922. Sammlung Wissen und Wirken.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Karl Orthmann und Felix Müller, fortgesetzt von Emil Lampe, gegenwärtig herausgegeben von Leon Lichtenstein. Band 47, Jahrgang 1919—1920, Heft 1, S. 1—192. Erster, zweiter und dritter Abschnitt. (Geschichte, Philosophie und Pädagogik, Arithmetik und Algebra, Mengenlehre.) Das zweite Heft erscheint demnächst. Bis Ende 1924 ist die Herausgabe des 47. Bandes und eines Teiles des 48. Bandes, Jahrgang 1921—1922, in Aussicht genommen.

H. Rickert, Das Eine, die Einheit und die Eins. Zweite, umgearbeitete Auflage. (XII + 93 S.) Verlag von J. C. B. Mohr (Paul Siebeck). Tübingen 1924.

Hierzu eine Beilage der Verlagsbuchhandlung Julius Springer in Berlin W 9.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.